Capitolul 4

Interpolarea funcţiilor

4.1 Diferenţe finite. Proprietăţi generale

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Considerăm mulţimea

$$M = \left\{x_i \,|\, a \leq x_i \leq b,\ x_i = a + ih,\ i = \overline{0, n}\right\},$$

unde $\Delta x = h$ =constant, $n \in \mathbb{N}^\star$ şi $x \in M$.

Definiţie 4.1.1 *Se numeşte* pas ($\Delta x = h$) *o valoare fixată a creşterii argumentului lui* f.

Definiţie 4.1.2

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

se numeşte prima diferenţă a funcţiei f.

Putem, acum, defini diferenţa de ordin n $(n \in \mathbb{N}^\star)$ *a funcţiei* f *prin*

$$\Delta^0 y = y,\ \Delta^n y = \Delta\left(\Delta^{n-1} y\right).$$

Exemplu 4.1.1 *Să se calculeze diferenţa de ordin* n $(n \in \mathbb{N}^\star)$ *a funcţiei*

$$y = f(x) = 3x^2 + 1$$

cu pasul $\Delta x = h = 1$.

Avem, conform Definiţiilor 4.1.1 şi 4.1.2,

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x+1)^2 + 1 - 3x^2 - 1 = 6x + 3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x + 3$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = 6(x+1) + 3 - 6x - 3 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Pentru $k > 2$, $k \in \mathbb{N}^\star$, *rezultă* $\Delta^k f(x) = 0$.

Acest exemplu sugerează o teoremă generală referitoare la calculul diferenţei de ordin n a unui polinom de gradul n.

Teoremă 4.1.1 *Dacă*

$$P_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

este o funcţie polinomială de grad n cu coeficienţi reali, atunci

$$\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n,$$

unde h este pasul ales ($\Delta x = h$).

Demonstraţie. Calculând primele două diferenţe avem:

$$\Delta P_n(x) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x+h) + a_n -$$
$$-a_0x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n =$$
$$= a_0^{(1)}x^{n-1} + a_1^{(1)}x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} = P_{n-1}^{(1)}(x),$$

unde $a_0^{(1)} = na_0h$.

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_{n-1}^{(1)}(x) = a_0^{(1)}(x+h)^{n-1} + a_1^{(1)}(x+h)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} -$$
$$-a_0^{(1)}x^{n-1} - a_1^{(1)}x^{n-2} - \cdots - a_{n-1}^{(1)} =$$
$$= a_0^{(2)}x^{n-2} + a_1^{(2)}x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}^{(2)} = P_{n-2}^{(2)}(x),$$

unde $a_0^{(2)} = a_0^{(1)}(n-1)h = n(n-1)a_0h^2$.

Calculând, din aproape în aproape, rezultă

$$\Delta^{n-1}P_n(x) = \Delta P_2^{(n-2)}(x) = a_0^{(n-1)}x + a_1^{(n-1)} = P_1^{(n-1)}(x),$$

unde $a_0^{(n-1)} = a_0^{(n-2)} \cdot 2 \cdot h = a_0 \cdot n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot h^{n-1}$.

Deci

$$\Delta^n P(x) = \Delta P_1^{(n-1)}(x) = a_0^{(n)} = P_0^{(n)},$$

unde $a_0^{(n)} = a_0^{(n-1)} \cdot 1 \cdot h = a_0 n! h^n$. ■

Corolar 4.1.1 *Dacă $n \in \mathbb{N}^\star$, atunci $\Delta^{n+1}P_n(x) = 0$ şi în general, pentru $k \in \mathbb{N}^\star$, $k > n$, $\Delta^k P_n(x) = 0$.*

Corolar 4.1.2 *Δ poate fi considerat ca un operator care asociază funcţiei f funcţia*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

unde Δx este o constantă dată.

Se verifică cu uşurinţă că este operator liniar şi în plus

$$\Delta^m (\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y, \quad (m, n \in \mathbb{N}^\star).$$

Corolar 4.1.3 *Din Definiţia 4.1.2 urmează, folosind calculul simbolic,*

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) = (1+\Delta)f(x) \tag{4.1}$$

Iterând această relaţie avem

$$f(x+n\Delta x) = (1+\Delta)^n f(x) \tag{4.2}$$

sau

$$f(x+n\Delta x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta^m f(x). \tag{4.3}$$

Observaţie 4.1.1 *Utilizând identitatea* $\Delta = (1+\Delta) - 1$ *putem scrie*

$$\Delta^n f(x) = \left[(1+\Delta)-1\right]^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (1+\Delta)^{n-k} f(x) =$$

$$= (1+\Delta)^n f(x) - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} f(x) + \cdots + (-1)^n f(x).$$

Rezultă

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= f(x+n\Delta x) - C_n^1 f(x+(n-1)\Delta x) + \\ &+ C_n^2 f(x+(n-2)\Delta x) - \cdots + (-1)^n f(x).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Exemplu 4.1.2 *Să se calculeze diferenţa de ordin* n *a funcţiei*

$$y = \sin x.$$

Demonstraţia o vom face prin inducţie.
Pentru $n = 1$ *avem:*

$$\Delta y = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right].$$

Pentru $n = 2$ *urmează*

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x+h\right] - 2\sin\frac{h}{2}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right] =$$

$$= 2\sin\frac{h}{2}\cdot 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+h+\frac{\pi}{2}\right) = 4\sin^2\frac{h}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x+h+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2 \sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right].$$

Presupunem că pentru $n-1$ *avem*

$$\Delta^{n-1} y = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n-1}\sin\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right]$$

şi calculăm $\Delta^n y$.

Deci

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n-1}\left\{\sin\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x+h\right]-\right.$$

$$\left.-\sin\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right]\right\} =$$

$$= \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n}\cos\left[(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x+\frac{h}{2}\right] =$$

$$= \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{n}\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+x\right].$$

Acest exemplu ne sugerează legătura ce ar putea exista între calculul diferenţei de ordin n şi derivata de ordin n a funcţiei (evident derivabilă de n ori).

Teoremă 4.1.2 *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcţie indefinit derivabilă iar* $\Delta x = h$ *pasul dat. În aceste condiţii avem*

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + n\theta\Delta x),$$

unde $0 < \theta < 1$.

Demonstraţie. Demonstraţia o facem prin inducţie.

Pentru $n = 1$ urmează:

$$\Delta f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x),$$

care este Teorema creşterilor finite a lui Lagrange.

Să presupunem că această relaţie este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^\star$ şi să o verificăm pentru $k + 1$. Deci:

$$\Delta^{k+1} f(x) = \Delta(\Delta^k f(x)) = \Delta^k [f(x+\Delta x) - f(x)] = \Delta^k f(x+\Delta x) - \Delta^k f(x) =$$

$$= (\Delta x)^k \left[f^{(k)}(x + \Delta x + k\theta'\Delta x) - f^{(k)}(x + k\theta'\Delta x)\right] =$$

$$= (\Delta x)^k \cdot \Delta x \cdot f^{(k+1)}(x + k\theta'\Delta x + \theta''\Delta x),$$

unde $0 < \theta', \theta'' < 1$ (am aplicat Teorema creşterilor finite a lui Lagrange).

Notând

$$\theta = \frac{\theta' k + \theta''}{k+1},$$

cu $0 < \theta < 1$, urmează

$$\Delta^{k+1} f(x) = (\Delta x)^{k+1} f^{(k+1)}(x + \theta(k+1)\Delta x)$$

deoarece

$$\theta' k\Delta x + \theta''\Delta x = \Delta x(\theta' k + \theta'') = (1+k)\theta\Delta x. \blacksquare$$

Corolar 4.1.4 *Pentru $n \in \mathbb{N}^\star$ avem*

$$f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}.$$

Presupunând $f^{(n)}$ continuă, rezultă

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n} = f^{(n)}(x).$$

4.2 Tabloul diferenţelor finite. Aplicaţii

Tabloul diferenţelor se utilizează când funcţiile sunt date prin valori tabelate, $y_i = f(x_i)$, pentru un sistem de puncte echidistante x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, adică

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{constant}. \tag{4.5}$$

Diferenţele corespunzătoare vor fi

$$\begin{array}{ll} \Delta y_i & = y_{i+1} - y_i \\ \Delta^2 y_i & = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = \\ & = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \\ \ldots & \quad \ldots \\ \Delta^n y_i & = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \end{array} \tag{4.6}$$

Relaţiile (4.6) se pot scrie în funcţie de observaţiile făcute în paragraful anterior

$$\begin{array}{ll} y_{i+1} & = y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i \\ y_{i+2} & = y_{i+1} + \Delta y_{i+1} = (1+\Delta) y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i \\ y_{i+3} & = y_{i+2} + \Delta y_{i+2} = (1+\Delta) y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i \\ \ldots & \quad \ldots \\ y_{i+n} & = (1+\Delta)^n y_i \end{array}$$

sau

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \Delta y_i + C_n^2 \Delta^2 y_i + \cdots + \Delta^n y_i. \tag{4.7}$$

Reciproc avem

$$\Delta^n y_i = \left[(1+\Delta) - 1\right]^n y_i =$$

$$= (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i + \cdots + (-1)^n y_i$$

sau, ţinând cont de (4.7) avem

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} - \cdots + (-1)^n y_i. \tag{4.8}$$

Exemplu 4.2.1 *Fie* $y_0 = 2$, $y_1 = 8$, $y_2 = 23$, $y_3 = 35$, $y_4 = 48$, $y_5 = 65$, $y_6 = 94, \ldots$, *valorile unei funcţii pentru argumentele:* $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_5 = 7$, $x_6 = 8, \ldots$.

Să calculăm $\Delta^6 y_0$.

Din formulele (4.8) avem

$$\Delta^6 y_0 = y_6 - C_6^1 y_5 + C_6^2 y_4 - C_6^3 y_3 + C_6^2 y_2 - C_6^1 y_1 + y_0 =$$

$$= 94 - 6 \cdot 65 + 15 \cdot 48 - 20 \cdot 35 + 15 \cdot 23 - 6 \cdot 8 + 2 = 23$$

Exemplu 4.2.2 *Fiind dat şirul diferenţelor* $y_0 = 0$, $\Delta y_0 = 1$, $\Delta^2 y_0 = 2$, $\Delta^3 y_0 = 3$, $\Delta^4 y_0 = 4$, *să calculăm* y_1, y_2, y_3 *şi* y_4.

Avem:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \Delta y_0 \\
&= 0 + 1 = 1 \\
y_2 &= (1+\Delta)^2 y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \\
&= 0 + 2 \cdot 1 + 2 = 4 \\
y_3 &= (1+\Delta)^3 y_0 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \\
&= 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 = 12 \\
y_4 &= (1+\Delta)^4 y_0 = y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0 \\
&= 0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 = 32
\end{aligned}$$

Observaţie 4.2.1 *Folosind formula (4.1) putem dovedi că*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = y_n - y_0.$$

Putem scrie

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \cdots + \Delta y_{n-1} =$$

$$= y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \cdots + y_n - y_{n-1} = y_n - y_0.$$

Exemplu 4.2.3 *Să se verifice, cu ajutorul diferenţelor, relaţia*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^\star.$$

Vom căuta un polinom P *pentru care*

$$\Delta P(x) = x,$$

iar pasul $h = 1$.

Deci polinomul va fi de forma

$$P(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2.$$

Deci

$$x = \Delta P(x) = A_0(x+1)^2 + A_1(x+1) + A_2 - A_0x^2 - A_1x - A_2 = 2A_0x + A_0 + A_1.$$

Rezultă

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = -\frac{1}{2}.$$

Prin urmare

$$P(x) = \frac{x^2 - x}{2}.$$

Calculăm valorile lui $P(x)$ pentru $x = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1$.

$$y_0 = P(0) = 0, \ \ y_1 = P(1) = 0, \ \ y_2 = P(2) = 1$$

$$y_3 = P(3) = \frac{3^2 - 3}{2} = 3, y_4 = \frac{4^2 - 4}{2} = 6, \ldots, y_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}.$$

Urmează

$$\begin{array}{lll} \Delta y_0 & = y_1 - y_0 & = 0 \\ \Delta y_1 & = y_2 - y_1 & = 1 \\ \Delta y_2 & = y_3 - y_2 & = 2 \\ \Delta y_3 & = y_4 - y_3 & = 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta y_n & = y_{n+1} - y_n & = n \end{array}$$

Deci

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = y_{n+1} - y_1 = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

În practică se aranjează, pentru uşurinţa calculului, diferenţele sub forma a două tablouri, unul orizontal iar altul diagonal, având una din formele:
a)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\ldots$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\ldots$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\ldots$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

b)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

4.3 Formula de interpolare a lui Lagrange

Fie un segment $[a, b]$, $n + 1$ puncte $x_0, x_1, \dots, x_n$ din acesta (*noduri* sau *puncte de interpolare*) şi valorile unei funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ în aceste puncte:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Se pune problema construirii unei noi funcţii $F(x)$ astfel încât

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n.$$

Teoremă 4.3.1 *Fie funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, nodurile de interpolare $x_0, x_1, \dots, x_n$ şi valorile în noduri $y_0, y_1, \dots, y_n$. Atunci există un unic polinom $L_n(x)$ de grad cel mult n care în noduri să coincidă cu f, adică*

$$L_n(x_i) = y_i, \quad (i = \overline{0, n}).$$

Demonstraţie. a) Construim un polinom $p_i(x)$ astfel încât

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Scriem polinomul sub forma

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) \tag{4.9}$$

unde C_i sunt constante.

Punem $x = x_i$ şi obţinem

$$p_i(x_i) = 1 = C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

adică

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \tag{4.10}$$

Înlocuind (4.10) în (4.9) rezultă

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad (4.11)$$

b) Construim polinomul $L_n(x)$ cu condiţia $L_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$.

Arătăm că acest polinom este de forma

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y_i. \quad (4.12)$$

I. Gradul acestui polinom este mai mic sau egal cu n.

II. $L_n(x_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i(x_j) y_i = p_j(x_j) y_j = y_j$, $(j = \overline{0,n})$.

III. Înlocuind (4.11) în (4.12) rezultă

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} y_i. \quad (4.13)$$

Acest polinom se numeşte *polinomul de interpolare Lagrange.*

c) Arătăm că polinomul de interpolare Lagrange este unic.

Presupunem că nu este unic. Atunci există un polinom $T_n(x)$, distinct de $L_n(x)$, de grad mai mic sau egal cu n astfel încât $T_n(x_i) = y_i$, $(i = \overline{0,n})$. Construim polinomul

$$Q_n(x) = T_n(x) - L_n(x).$$

Observăm că

I. $\operatorname{grad} Q_n(x) \leq n$

II. $Q_n(x)$ se anulează în $(n+1)$ puncte distincte $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$Q_n(x)$ fiind polinom de grad cel mult n care se anulează pentru $n+1$ valori distincte, urmează

$$Q_n(x) = 0 \Rightarrow T_n(x) = L_n(x). \blacksquare$$

Observaţie 4.3.1 *Notăm*

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \quad (4.14)$$

Derivând, rezultă

$$\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} (x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n). \quad (4.15)$$

Înlocuind în (4.15) pe x prin x_i, $(i = \overline{0,n})$ obţinem

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} (x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})\cdots(x_i-x_n) =$$

$$= (x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n).$$

Deci (4.13) devine

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \cdot \frac{1}{x-x_i} =$$

$$= \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\Pi'_{n+1}(x_i)(x-x_i)}. \tag{4.16}$$

Observaţie 4.3.2 *Pentru $n = 1$ considerăm $x_0 = a, x_1 = b$ şi $y = L_1(x)$. Deci*

$$y = \frac{x-b}{a-b} y_0 + \frac{x-a}{b-a} y_1.$$

Pentru $n = 2$ considerăm $x_0 = a, x_1 = b$ şi $x_2 = c$, iar $y = L_2(x)$. Rezultă

$$y = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} y_0 + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} y_1 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} y_2.$$

Exemplu 4.3.1 *Să se construiască polinomul Lagrange al funcţiei $y = \sin \pi x$ în punctele*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Calculăm valorile $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$ şi $y_2 = f(x_2)$, adică

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Deci

$$L_2(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)} \cdot 0 + \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} \cdot 1 = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Fie $M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Teoremă 4.3.2 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă $C^{(n+1)}_{[a,b]}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nodurile de interpolare pe $[a, b]$ cu $x_0 = a$ şi $x_n = b$, $y_i = f(x_i)$, $(i = \overline{0, n})$ valorile funcţiei f în noduri. În aceste condiţii, dacă notăm prin $L_n(x)$ polinomul Lagrange, avem*

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \Pi_{n+1}(x) \right|.$$

Demonstraţie. a) Notăm deci $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$. Introducem funcţia auxiliară $u(x)$ definită astfel:

$$u(x) = f(x) - L_n(x) - k\Pi_{n+1}(x). \tag{4.17}$$

b) Alegem constanta k astfel ca $u(x)$ să aibă a $(n+2)$-a rădăcină $\bar{x}$ în $[a, b]$, $\bar{x} \neq x_i$, $(i = \overline{0, n})$. Deci

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k\Pi_{n+1}(\bar{x}) = u(\bar{x}) = 0.$$

Deci

$$k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})}. \tag{4.18}$$

c) Pentru valoarea lui k dată de (4.18), $u(x)$ are $(n+2)$ rădăcini pe $[a, b]$ şi se anulează la capatele fiecărui interval

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_i, \bar{x}],\ [\bar{x}, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Aplicând *teorema lui Rolle* funcţiei $u(x)$ pe fiecare segment, observăm că $u'(x)$ are cel puţin $(n+1)$ rădăcini în $[a, b]$, $u''(x)$ va avea cel puţin n rădăcini în $[a, b]$, ş. a. m. d. Deci $u^{(n+1)}(x)$ are cel puţin o rădăcină, fie ea ξ, în $[a, b]$, adică

$$u^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Deoarece L_n este un polinom de grad n avem $L_n^{(n+1)}(x) = 0$, iar $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Derivând (4.17) de $n+1$ ori, avem

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!.$$

Pentru $x = \xi$ avem $0 = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$, adică

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{4.19}$$

d) Din relaţiile (4.18) şi (4.19) rezultă

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

sau

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(\bar{x}).$$

e) Deoarece $\bar{x}$ este arbitrar în $[a, b]$ putem scrie

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x),$$

unde ξ depinde de x, iar $\xi \in (a,b)$.

Deci, în final, avem

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\Pi_{n+1}(x)|\,. \blacksquare$$

Exemplu 4.3.2 *Să se determine cu ce precizie se poate calcula $\sqrt{115}$ utilizând polinomul $L_2(x)$ al lui Lagrange pentru funcţia $y = \sqrt{x}$ în punctele de interpolare*

$$x_0 = 100,\;\; x_1 = 121,\;\; x_2 = 144.$$

Avem

$$y'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\;\; y''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\;\; y''' = -\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Deci

$$M_3 = \max_{100 \leq x \leq 144} |y'''(x)| = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}.$$

Rezultă

$$|R_2(115)| \leq \frac{3}{5} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!} \cdot |(115-100)(115-121)(115-144)| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 6 \cdot 29 \approx 1,6 \cdot 10^{-3}.$$

Exemplu 4.3.3 *Să se determine polinomul de interpolare Lagrange pentru punctele*

$$(-2,-23),(-1,-7),(1,1),(2,5).$$

Avem 4 puncte, deci gradul polinomului este $n = 3$. Aplicând formula din relaţia (4.13) obţinem:

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} \cdot (-23) + \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} \cdot (-7) +$$

$$+ \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} \cdot 1 + \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} \cdot 5 =$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{-12} \cdot (-23) + \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{6} \cdot (-7) +$$

$$+ \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{-6} \cdot 1 + \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{12} \cdot 5$$

În urma calculelor obţinem

$$L_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$$

Programul pentru Polinomul de interpolare Lagrange

Prezentăm în continuare un program pentru calculul valorii polinomului de interpolare Lagrange pentru un argument x, dat, dacă se cunosc punctele de interpolare $(x_i, y_i),\ i = \overline{0,n}$.

4.4 Puteri generalizate. Polinoamele de interpolare Newton

Definiţie 4.4.1 *Se numeşte* **putere generalizată de ordin** n *produsul de* n *factori, din care primul este* x*, iar fiecare termen care urmează diferă de precedentul prin* h*, adică*

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-1)h]$$

unde h *este un număr fixat.*

Observaţie 4.4.1 *Pentru* $h = 0$ *se obţine* $x^{[n]} = x^n$*.*

Teoremă 4.4.1 *Dacă* $k \in \mathbb{N}^\star$*,* $k < n$*, atunci*

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\cdots[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]}.$$

Demonstraţie.

$$\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]} = (x+h)x(x-h)\cdots[x-(n-2)h]-$$

$$-x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-1)h] =$$
$$= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h][x+h-x+(n-1)h] =$$
$$= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h]nh = nhx^{[n-1]}$$

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta\left(\Delta x^{[n]}\right) = \Delta\left(nhx^{[n-1]}\right) = nh\Delta x^{[n-1]} =$$
$$= nh(n-1)hx^{[n-2]} = n(n-1)h^2 x^{[n-2]}$$

Presupunem că pentru $p \geq 1$ avem

$$\Delta^p x^{[n]} = n(n-1)\cdots[n-(p-1)]h^p x^{[n-p]}.$$

Prin urmare avem

$$\Delta^{p+1} x^{[n]} = \Delta\left(\Delta^p x^{[n]}\right) = n(n-1)\cdots[n-(p-1)]h^p \Delta x^{[n-p]} =$$

$$= n(n-1)\cdots[n-(p-1)]h^p h(n-p)x^{[n-p-1]} =$$
$$= n(n-1)\cdots[n-(p-1)](n-p)h^{p+1}x^{[n-p-1]}. \blacksquare$$

Observaţie 4.4.2 *Pentru* $s > n$ *avem că*

$$\Delta^s x^{[n]} = 0.$$

Teoremă 4.4.2 *Fie funcţia reală de variabilă reală $y = f(x)$, $(f : [a, b] \to \mathbb{R})$, iar $x_i = a + ih$ (cu $i = \overline{0, n}$, $x_0 = a, x_n = b$, h fiind pasul de interpolare).*

Dacă $y_i = f(x_i)$ sunt valorile funcţiei f în nodurile de interpolare, atunci se poate determina un polinom P_n, de grad mai mic sau egal cu n, astfel încât $P_n(x_i) = y_i$, de forma

$$P_n = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Demonstraţie. a) Căutăm polinomul dat de forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \\ + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \quad (4.20)$$

Polinomul (4.20) se mai scrie, utilizând puterile generalizate,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + \cdots + a_n(x - x_0)^{[n]}. \quad (4.21)$$

Condiţiile $P_n(x_i) = y_i$ sunt echivalente cu

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0, \quad m = \overline{0, n}.$$

b) Determinăm coeficienţii polinomului (4.21)

I) Înlocuim $x = x_0$ în (4.21) şi obţinem

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0. \quad (4.22)$$

II) Calculăm prima diferenţă finită a polinomului (4.21) şi, ţinând cont de Teorema 4.4.1, avem

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]}h + 3a_3(x - x_0)^{[2]}h + \cdots + na_n(x - x_0)^{[n-1]}h.$$

Înlocuim, din nou, pe x prin x_0 şi avem

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}. \quad (4.23)$$

III) Calculăm cea de-a doua diferenţă finită a polinomului $P_n(x)$:

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!a_2h^2 + 2 \cdot 3a_3h^2(x - x_0)^{[1]} + \cdots (n-1)na_nh^2(x - x_0)^{[n-2]}.$$

Înlocuind pe x prin x_0 avem

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = a_2 2!h^2,$$

adică

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}. \quad (4.24)$$

IV) Din aproape în aproape, urmează:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}, \quad (i = \overline{0, n}). \tag{4.25}$$

V) Ţinând cont de relaţiile (4.23) polinomul nostru ia forma

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)^{[2]} + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)^{[n]}. \tag{4.26}$$

c) Verificăm că polinomul dat de (4.26) este polinom de interpolare.
I. Se observă, din (4.26), că grad P_n este mai mic sau egal cu n.
II. În plus, $P_n(x_0) = y_0$.
III. Arătăm că $P_n(x_k) = y_k$ pentru $k = \overline{1, n}$. Avem

$$P_n(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} kh + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}[(k-1)h]kh + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1}{k!}\Delta^k y_0 =$$

$$= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \Delta^k y_0 = (1 + \Delta)^k y_0 = y_k.$$

Am ţinut cont de faptul că

$$\frac{\Delta^p y_0}{p! h^p}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{p-1}) = 0, \quad \forall p \in \overline{k+1, n}.$$

d) Notăm

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Urmează

$$\frac{(x - x_0)^{[i]}}{h^i} = \frac{(x - x_0)}{h} \cdot \frac{(x - x_0) - h}{h} \cdots \frac{(x - x_0) - (i-1)h}{h} =$$

$$= q(q-1)(q-2)\cdots(q - i + 1), \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.27}$$

Înlocuind (4.27) în (4.26) avem formula cerută de teoremă. ■

Observaţie 4.4.3 *Polinomul de mai sus se numeşte* **polinomul de interpolare Newton** *şi se poate utiliza pentru valori ale argumentului în vecinătatea lui x_0 (pentru valori mici ale lui q).*

Observaţie 4.4.4 *Pentru $h \to 0$ obţinem*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^k y_0}{h^k} = \left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0).$$

În aceste condiţii formula (4.27) devine polinomul Taylor, adică

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Exemplu 4.4.1 *Fie*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Să se calculeze, cu ajutorul polinomului de interpolare Newton, $\Phi(1,43)$ *folosind valorile funcţiei* $\Phi(x)$ *pe intervalul* $[1,3;\ 1,7]$ *cu pasul* $h = 0,1$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1,3	0,9340	0,0183	−0,0045	0,0009	0,0000
1,4	**0,9523**	**0,0138**	**−0,0036**	**0,0009**	
1,5	0,9661	0,0102	−0,0027		
1,6	0,9763	0,0075			
1,7	0,9838				

Luăm $x_0 = 1,40$, $h = 0,1$ *şi prin urmare*

$$q = \frac{1,43 - 1,4}{0,1} = 0,3.$$

Construim polinomul de interpolare Newton:

$$y \approx \mathbf{0,9523} + 0,3 \cdot \mathbf{0,0138} + \frac{0,3(0,3-1)}{2!} \cdot (\mathbf{-0,0036}) +$$

$$+ \frac{0,3(0,3-1)(0,3-2)}{3!} \cdot \mathbf{0,0009} \approx 0,95687.$$

Observaţie 4.4.5 *Formula lui Newton din Teorema 4.4.2 este incomodă pentru partea finală a tabloului şi de aceea vom construi un nou polinom de interpolare de tip Newton pentru a înlătura acest inconvenient.*

Fie, deci, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y_i = f(x_i)$ valorile funcţiei f în nodurile de interpolare echidistante $x_i = a + ih$, cu $i = \overline{0, n}$ $(x_0 = a, x_n = b)$.

Teoremă 4.4.3 *Polinomul*

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

este un polinom de interpolare, unde

$$q = \frac{x - x_n}{h},$$

iar $x \in (a, b)$.

Demonstraţie. a) Considerăm polinomul

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) +$$
$$+ \cdots + a_n(x - x_n) \cdots (x - x_1). \quad (4.28)$$

Utilizând puterile generalizate, (4.28) devine

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} + a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + \cdots +$$
$$+ a_n(x - x_1)^{[n]}. \quad (4.29)$$

b) Calculăm coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ai polinomului dat de relaţia (4.29) punând condiţiile

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$$

sau

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Înlocuind în (4.29) pe x prin x_n urmează

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

adică

$$a_0 = y_n. \quad (4.30)$$

c) Calculăm acum prima diferenţă:

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot 1 \cdot h + a_2 \cdot 2 \cdot h \cdot (x - x_{n-1})^{[1]} +$$
$$+ a_3 \cdot 3 \cdot h \cdot (x - x_{n-2})^{[2]} + \cdots + a_n \cdot n \cdot h \cdot (x - x_1)^{[n-1]}. \quad (4.31)$$

Înlocuind în (4.31) pe x prin x_{n-1}, urmează:

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 \cdot 1 \cdot h,$$

adică

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1! \cdot h}. \quad (4.32)$$

d) Calculăm a doua diferenţă şi avem:

$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot h^2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot h^2 \cdot (x - x_{n-2})^{[1]} +$$

$$+ \cdots + a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot h^2 \cdot (x - x_1)^{[n-2]}. \quad (4.33)$$

Înlocuind în (4.33) pe x prin x_{n-2} rezultă

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 \cdot 2! \cdot h^2,$$

adică

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! \cdot h^2}. \quad (4.34)$$

e) Calculând succesiv după modelul de la punctele c) şi d) urmează

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! \cdot h^i}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (4.35)$$

Înlocuind valorile a_i, $(i = \overline{0, n})$ din (4.35) în formula (4.29) şi ţinând cont de faptul că

$$\frac{x - x_n}{h} = q, \quad \frac{x - x_{n-1}}{h} = q + 1, \quad \ldots, \quad \frac{x - x_1}{h} = q + n - 1,$$

urmează

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Polinomul $P_n(x)$ are gradul mai mic sau egal cu n, iar $P_n(x_i) = y_i$, $(i = \overline{0, n})$, adică $P_n(x)$ este un polinom de interpolare.

Exemplu 4.4.2 *Cunoscând valorile logaritmilor zecimali ai numerelor* 1000, 1010, 1020, 1030, 1040 *şi* 1050 *(deci pasul este* $h = 10$*) cu şapte zecimale să se calculeze, cu ajutorul unui polinom de interpolare Newton,* lg 1044.

Formăm tabloul diferenţelor

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	0,0043214	−0,0000426	0,0000008
1010	3,0043214	0,0042788	−0,0000418	0,0000009
1020	3,0086002	0,0042370	−0,0000409	**0,0000008**
1030	3,0128372	0,0041961	**−0,0000401**	
1040	3,0170333	**0,0041560**		
1050	**3,0211893**			

Deoarece $x_n = 1050$ *rezultă că avem*

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0,6.$$

Deci

$$\lg 1044 \approx 3,0211893 + (-0,6)\cdot 0,0041560 + \frac{(-0,6)(-0,6+1)}{2}\cdot 0,0000401+$$
$$+\frac{(-0,6)(-0,6+1)(-0,6+2)}{6}\cdot 0,0000008 \approx 3,0187005$$

(toate cifrele calculate fiind exacte).

Observaţie 4.4.6 *Din Teorema 4.3.2 rezultă că restul formulei lui Lagrange este dat de*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x) \tag{4.36}$$

Notând

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

formula (4.36) devine

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\ \ \xi \in (x_0, x_n). \tag{4.37}$$

care este restul primului polinom de interpolare Newton.

Notând acum

$$q = \frac{x - x_n}{h},$$

formula (4.36) devine

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\cdots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\ \ \xi \in (x_0, x_n). \tag{4.38}$$

care este restul celui de-al doilea polinom de interpolare Newton.

Observaţie 4.4.7 *Deoarece*

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}}$$

putem aproxima pe $f^{(n+1)}(\xi)$ din formulele (4.37) şi (4.38) prin

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}.$$

Deci, în aceste condiţii, relaţiile (4.37) şi (4.38) devin

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0, \tag{4.39}$$

respectiv

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\cdots(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_n \tag{4.40}$$

4.5 Diferenţe centrale

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \ldots, x_{\pm n}$ nodurile de interpolare echidistante, $y_i = f(x_i)$ valorile funcţiei f în noduri, iar $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$ =const., $(i = \overline{-n, n-1})$.

Teoremă 4.5.1 (Formula lui Gauss) *Există un polinom $P(x)$, de grad mai mic sau egal cu $2n$, astfel încât*

$$P(x_i) = y_i, \quad i = \overline{-n, n}. \tag{4.41}$$

Demonstraţie. Condiţia (4.41) implică

$$\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i, \;\; k = \overline{0, 2n}, \;\; i = \overline{-n, n}.$$

Căutăm polinomul sub forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} + a_4(x - x_{-1})^{[4]} +$$
$$+ \cdots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})^{[2n]}. \tag{4.42}$$

Aplicând diferenţele succesive polinomului P în acelaşi mod ca în formulele lui Newton, avem

$$a_0 = y_0, \; a_1 = \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h}, \; a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2! \cdot h^2}, \; a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3! \cdot h^3}, \; a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4! \cdot h^4}, \cdots,$$

$$a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)! \cdot h^{2n-1}}, \; a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)! \cdot h^{2n}}.$$

Notăm

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

şi înlocuind în (4.42) avem

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \cdots +$$
$$+ \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$
$$+ \frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}. \tag{4.43}$$

Scriind (4.43) cu ajutorul puterilor generalizate avem

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots +$$

$$+\frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}. \blacksquare \tag{4.44}$$

Observaţie 4.5.1 *Diferenţele* $\Delta y_{-1}, \Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \ldots$ *se numesc* **diferenţe centrale** *şi ele realizează o aproximare, prin valori luate de o parte şi de alta, a valorii în jurul căreia se face aproximarea.*

Observaţie 4.5.2 *Putem construi o a doua formulă de aproximare, analoagă polinomului de interpolare Newton, dată de*

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots +$$

$$+\frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \tag{4.45}$$

unde

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad q^{[m]} = q(q-1)\cdots[q-(m-1)].$$

Observaţie 4.5.3 (Formula lui Stirling) *Făcând media aritmetică a celor două formule ale lui Gauss se obţine:*

$$P(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \cdots +$$

$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

unde

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

4.6 Formula lui Bessel

Considerăm $2n+1$ puncte de interpolare echidistante

$$x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

de pas h şi fie $y_i = f(x_i)$, $(i = \overline{-n,n})$ valorile date ale funcţiei $y = f(x)$ luând ca valori iniţiale $x = x_0$ şi $y = y_0$ utilizând punctele x_k $(k = \overline{-n,n})$.

Avem

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$

$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} +$$

$$+\frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}. \qquad (4.46)$$

Luând ca valori iniţiale $x = x_1$ şi $y = y_1$ şi punctele x_{1+k} $(k = \overline{-n,n})$ avem

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 1,$$

indicii diferenţelor din membrul doi al lui (4.46) crescând cu o unitate. Înlocuind în (4.46) q prin $q-1$, mărind cu o unitate indicii tuturor diferenţelor, se obţine

$$P(x) = y_1 + (q-1)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1} + \cdots + \frac{(q+n-2)\cdots(q-n)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+\frac{(q+n-1)(q+n-2)\cdots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-(n-1)}. \qquad (4.47)$$

Făcând media aritmetică cu prima formulă a lui Gauss

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \cdots +$$

$$+\frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+\frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

obţinem formula lui Bessel

$$P(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2y_{-1}+\Delta^2y_0}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!}\Delta^3y_{-1}+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\frac{\Delta^4y_{-2}+\Delta^4y_{-1}}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5y_{-1}+$$

$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!}\cdot\frac{\Delta^6y_{-3}+\Delta^6y_{-2}}{2}+\cdots+$$

$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\cdots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\cdots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n}. \quad (4.48)$$

Formula lui Bessel (4.48) reprezintă un polinom care coincide cu funcţia dată $y=f(x)$ în $2n+2$ puncte $x_{-n},\ldots,x_n,x_{n+1}$.

Pentru $n=1$, neglijând Δ^2y_{-1}, avem formula lui Bessel de interpolare pătratică

$$P(x)=\frac{y_0+y_0+\Delta y_0}{2}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{\Delta y_0-\Delta y_{-1}+\Delta y_1-\Delta y_0}{2}$$

sau

$$P(x)=y_0+q\Delta y_0-\frac{q(1-q)}{4}\left(\Delta y_1-\Delta y_{-1}\right).$$

Observaţie 4.6.1 *În formula lui Bessel toţi termenii ce conţin diferenţe de ordin impar au factorul* $\left(q-\frac{1}{2}\right)$. *Deci, pentru* $q=\frac{1}{2}$ *formula Bessel devine*

$$P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta^2y_{-1}+\Delta^2y_0}{2}+\frac{2}{128}\cdot\frac{\Delta^4y_{-2}+\Delta^4y_{-1}}{2}-$$

$$-\frac{5}{1024}\cdot\frac{\Delta^6y_{-3}+\Delta^6y_{-2}}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{[1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)]^2}{2^{2n}(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}.$$

Observaţie 4.6.2 *Dacă în formula (4.48) facem schimbarea de variabilă*

$$q-\frac{1}{2}=p,$$

avem

$$P(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+p\Delta y_0+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2y_{-1}+\Delta^2y_0}{2}+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)}{3!}\Delta^3y_{-1}+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\left(p^2-\frac{25}{4}\right)}{6!}\cdot\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\cdots+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2}+$$

$$+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n+1} \tag{4.49}$$

unde

$$p=\frac{1}{h}\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right).$$

4.7 Diferenţe divizate. Formulele lui Newton şi Hermite

Noţiunea de diferenţă divizată generalizează pe aceea de derivată. Diferenţele divizate de ordin zero coincizând cu valorile funcţiei în noduri (nodurile fiind $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Definiţie 4.7.1 *Se numeşte* **diferenţă divizată de primul ordin** $f(x_i; x_j) = [x_i, x_j]$,

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}. \tag{4.50}$$

Definiţie 4.7.2 *Se numeşte* **diferenţă divizată de ordinul al doilea**

$$f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i}. \tag{4.51}$$

Definiţie 4.7.3 *Se numeşte* **diferenţă divizată de ordinul** k

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_{k+1}) = \frac{f(x_2; \ldots; x_{k+1}) - f(x_1; \ldots; x_k)}{x_{k+1} - x_1}. \tag{4.52}$$

Teoremă 4.7.1

$$f(x_1; \ldots; x_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{i\neq j}(x_j - x_i)}. \tag{4.53}$$

Demonstraţie. Demonstraţia o vom face prin inducţie.

Pentru $k = 1$ relaţia (4.53) devine $f(x_1) = f(x_1)$.

Pentru $k = 2$ relaţia (4.53) concide cu (4.50).

Presupunem că egalitatea (4.53) este satisfăcută pentru $i \leq l$. Deci

$$f(x_1; \ldots; x_{i+1}) = \frac{f(x_2; \ldots; x_{i+1}) - f(x_1; \ldots; x_i)}{x_{i+1} - x_1} =$$

$$= \frac{1}{x_{i+1} - x_1} \left(\sum_{j=2}^{l+1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 2 \leq i \leq l+1}} (x_j - x_i)} - \sum_{j=1}^{l} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq l}} (x_j - x_i)} \right).$$

Când $j \neq 1, l+1$, coeficientul lui $f(x_j)$ din membrul drept este:

$$\frac{\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 2 \leq i \leq l+1}} (x_j - x_i)} - \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq l}} (x_j - x_i)}}{x_{i+1} - x_1} = \frac{(x_j - x_1) - (x_j - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_1) \prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq l}} (x_j - x_i)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq l}} (x_j - x_i)}. \blacksquare$$

Corolar 4.7.1 *O diferenţă divizată este un operator liniar al funcţiei f şi avem*

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_1; \ldots; x_k) = \alpha_1 f_1(x_1; \ldots; x_k) + \alpha_2 f_2(x_1; \ldots; x_k).$$

Corolar 4.7.2 *O diferenţă divizată este* o funcţie simetrică în raport cu argumentele sale.

Corolar 4.7.3 *Dacă o funcţie este dată în nodurile $x_1, \ldots, x_n$, atunci avem:*

$$\begin{array}{ccccc}
f(x_1) & & & & \\
 & f(x_1; x_2) & & & \\
f(x_2) & & f(x_1; x_2; x_3) & & \\
 & f(x_2; x_3) & & \ldots & \\
f(x_3) & & \ldots & & f(x_1; \ldots; x_n) \\
 & \ldots & & \ldots & \\
\vdots & & \ldots & & \\
 & f(x_{n-1}; x_n) & & & \\
f(x_n) & & & &
\end{array}$$

care este **tabloul diferenţelor divizate**.

Teoremă 4.7.2 *Dacă $y = P(x)$ este un polinom de grad n, atunci diferenţa sa divizată de ordin $(n+1)$ satisface relaţia*

$$P(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = 0$$

pentru un sistem de numere distincte între ele $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Demonstraţie. Dacă $P(x)$ este un polinom de grad n avem din (4.50):

$$P(x; x_0) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{not.}}{=} P(x, x_0) \tag{4.54}$$

care este un polinom în x de grad $(n-1)$.

Continuând, avem:

$$P(x; x_0; x_1) = \frac{P(x, x_0) - P(x_0, x_1)}{x - x_1} \overset{\text{not.}}{=} P(x, x_0, x_1)$$

care este un polinom în x de grad $(n-2)$ deoarece funcţia

$$P(x, x_1) - P(x_0, x_1) = P(x, x_0) - P(x_1, x_0)$$

admite ca rădăcină pe $x = x_1$ şi în consecinţă, din *Teorema lui Bezout*, polinomul $P(x, x_0) - P(x_0, x_1)$ este divizibil prin $x - x_1$.

Continuând raţionamentul de mai sus rezultă că

$$P(x; x_0; x_1; \ldots; x_{n-1}) = P(x, x_0, \ldots, x_{n-1})$$

este un polinom de grad nul, adică

$$P(x, x_0, \ldots, x_{n-1}) = C.$$

Deci

$$P(x; x_0; \ldots; x_n) = \frac{C - C}{x - x_n} = 0. \blacksquare$$

Corolar 4.7.4 *Considerăm, în Teorema 4.7.2, în rolul lui $P(x)$ polinomul Lagrange de grad n, astfel ca*

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad (i = \overline{0, n}),$$

unde $y = f(x)$ este funcţia dată.

Din Teorema 4.7.2, am văzut că diferenţele divizate de ordin $(n+1)$ generează $P(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Deci

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = P(x, x_0)$$

sau

$$P(x) = P(x_0) + P(x, x_0)(x - x_0)$$

sau, folosind diferenţe de ordin $m + 1$, avem

$$P(x, x_0, \ldots, x_m) = \frac{P(x, x_0, \ldots, x_{m-1}) - P(x_0, \ldots, x_m)}{x - x_m}$$

sau

$$P(x, x_0, \ldots, x_{m-1}) = P(x_0, \ldots, x_m) + (x - x_m)P(x, x_0, \ldots, x_m).$$

Deducem deci

$$P(x) = P(x_0) + P(x, x_0)(x - x_0) + P(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1) =$$

$$= P(x_0) + P(x_0, x_1)(x - x_0) + P(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$

$$+P(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) + P(x, x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

Teoremă 4.7.3 *Fie $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puncte distincte interioare unui domeniu conex D în care $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă. În aceste condiţii avem*

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_n) = [x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z - x_0)\cdots(z - x_n)},$$

unde C este un contur rectificabil din planul complex conţinut în D şi care conţine în interior punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Demonstraţie. Fie deci integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z - x_0)\cdots(z - x_n)}$$

unde C este parcurs în sens pozitiv.

Calculăm această integrală prin teorema reziduurilor, ştiind că funcţia de sub integrală admite poli de ordinul întâi în x_i, $(i = \overline{0, n})$.

Deci

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z - x_0)\cdots(z - x_n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{n}(x_k - x_s)}.$$

Din Teorema 4.7.1 rezultă că

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{n}(x_k - x_s)} = [x_0, \ldots, x_n]. \blacksquare$$

Observaţie 4.7.1 *Acest lucru ne permite să afirmăm că în domeniul de olomorfie al lui $f(z)$ reprezentarea subzistă în cazul general oricum am deplasa punctele x_i $(i = \overline{0, n})$ în domeniul D mărginit de curba C. Deci, în particular, Teorema 4.7.3 rămâne adevărată în cazul general când punctele x_i $(i = \overline{0, n})$ pot să coincidă.*

Observaţie 4.7.2 *Putem evalua diferenţa divizată* $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *dacă folosim faptul că modulul integralei este cel mult egal cu maximul modulului funcţiei de sub semnul integralei înmulţit cu lungimea drumului de integrare* L*, adică:*

$$|[x_0, x_1, \ldots, x_n]| \leq \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{\max\limits_{z \in C} |f(z)|}{\min\limits_{z \in C} |(z - x_0) \cdots (z - x_n)|}.$$

Să considerăm acum faptul că $x_0, x_1, \ldots, x_n$ coincid cu mulţimea punctelor z_k. Notăm prin p_k ordinul de multiplicitate al lui z_k unde $k = \overline{0, \nu}$, cu

$$\sum_{k=0}^{\nu} p_k = n + 1.$$

Teoremă 4.7.4 *Fie* $f : D \to \mathbb{C}$*, olomorfă,* D *conex,* x_k*,* $k = \overline{0, n}$ *noduri de interpolare cu ordinul de multiplicitate* p_k *pe care le notăm prin* z_k*. În aceste condiţii avem*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k - 1} \sum_{s=0}^{m} \frac{f^{(m)}(z_k)}{(p_k - m - 1)!(m - s)!} \frac{d^{m-s}}{dz^{m-s}} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{Q(z)} \right] \Bigg|_{z = z_k} .$$

$$\cdot \frac{Q(x)}{(x - z_k)^{s+1}} + Q(x)[x, x_1, \ldots, x_n]$$

unde $x = x_0$*.*

Demonstraţie. a) Avem

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{p_0} \cdots (z - z_\nu)^{p_\nu}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\nu} \int\limits_{C_k} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{p_0} \cdots (z - z_\nu)^{p_\nu}},$$

unde contururile C_k *sunt cercuri cu centrul în* z_k *şi de rază* r_k. Ele sunt disjuncte şi sunt cuprinse în interiorul lui C.

b) Notăm

$$q(z) = \prod_{k=0}^{\nu} (z - z_k)^{p_k}$$

şi fie integrala

$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{(z - z_k)^{p_k}}{q(z)} f(z) \frac{dz}{(z - z_k)^{p_k}}.$$

Funcţia

$$\frac{1}{q(z)}(z-z_k)^{p_k} f(z)$$

este olomorfă în cercul limitat de conturul C_k.

Din expresia *derivatei de ordin* $p_k - 1$, cu ajutorul integralei Cauchy, avem

$$I_k = \frac{1}{(p_k-1)!} \cdot \frac{d^{p_k-1}}{dz^{p_k-1}} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{q(z)} f(z) \right] \bigg|_{z=z_k}.$$

Din formula lui Leibniz privind derivata de ordin n a produsului a două funcţii de clasă $C^{[n]}$ avem:

$$I_k = \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{f^{(m)}(z_k)}{m!(p_k-m-1)!} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \bigg|_{z=z_k}, \ k = \overline{0,\nu}. \tag{4.55}$$

c) Sumând relaţia (4.55) de la 0 la ν avem

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{f^{(m)}(z_k)}{m!(p_k-m-1)!} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \bigg|_{z=z_k}. \tag{4.56}$$

Această reprezentare a fost obţinută pentru $f(z)$ analitică.

Notăm $p_0 = 1$, $x_0 = x$ şi atunci $q(z) = (z-x)Q(z)$ unde

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{\nu} (z-z_k)^{p_k}$$

nu depinde de x şi obţinem din (4.56):

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f(x)}{Q(x)} - \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{f^{(m)}(z_k)}{(p_k-m-1)!} \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{(m-s)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{d^{m-s}}{dz^{m-s}} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{Q(z)} \right] \bigg|_{z=z_k} \cdot \frac{1}{(x-z_k)^{s+1}}.$$

Explicitând pe $f(x)$ (înmulţind prin $Q(x)$) avem

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{p_k-1} \sum_{s=0}^{m} \frac{f^{(m)}(z_k)}{(p_k-m-1)!(m-s)!} \frac{d^{m-s}}{dz^{m-s}} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{Q(z)} \right] \bigg|_{z=z_k} \cdot$$

$$\cdot \frac{Q(x)}{(x-z_k)^{s+1}} + Q(x)[x, x_1, \ldots, x_n]. \ \blacksquare$$

Capitolul 5

Formule de cuadratură

5.1 Introducere în formulele de cuadratură

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, integrabilă pe intervalul $[a, b]$ în care considerăm punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ care se vor numi **noduri**.

Definiţie 5.1.1 *O formulă de tipul*

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n) + R_n[f],$$

în care constantele $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *şi nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sunt alese astfel încât termenul* $R_n[f]$, *numit* rest, *să fie nul când funcţia* $f(x)$ *este înlocuită cu un polinom de grad* $p \in \mathbb{N}^\star$, *se numeşte* **formulă de cuadratură**.

Observaţie 5.1.1 *Polinomul care înlocuieşte funcţia* f *este, de obicei, un polinom de interpolare sau de aproximare, fie el* φ.

Observaţie 5.1.2 *În cazul când* f *este dată analitic se va evalua eroarea.*

Exemplu 5.1.1 (Aplicarea polinomului Lagrange) *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *în care funcţia* $y = f(x)$ *ia în nodurile de interpolare* x_i $(i = \overline{0, n})$ *valorile* y_i, *adică* $y_i = f(x_i)$, *pentru* $i = \overline{0, n}$.

Fie

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} y_i$$

polinomul de interpolare Lagrange care are proprietatea că $L_n(x_i) = y_i$.

Avem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R_n[f]$$

unde $R_n[f]$ *este eroarea formulei de cuadratură.*

Deci

$$I_n = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} y_i dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)dx}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} \right) y_i + R_n[f] = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i + R_n[f] \tag{5.1}$$

unde

$$A_i = \frac{1}{\Pi'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{x-x_i} dx.$$

Definiţie 5.1.2 *Dacă a şi b sunt puncte de interpolare, formula de cuadratură se numeşte* **de tip închis**, *iar când a şi b nu sunt puncte de interpolare formula de cuadratură se numeşte* **de tip deschis**.

Observaţie 5.1.3 *Coeficienţii A_i $(i = \overline{0,n})$ nu depind de alegerea funcţiei f.*

Observaţie 5.1.4 *Pentru polinoamele de grad n formula este exactă deoarece $L_n(x) \equiv f(x)$.*

În particular, este exactă pentru $y = x^k$, $(k = \overline{0,n})$, adică $R_n[x^k] = 0$.

Exemplu 5.1.2 *Ţinând cont de Observaţia 5.1.4 formulele (5.1) devin pentru $y = x^k$ $(k = \overline{0,n})$:*

$$\begin{array}{ll} k=0 & I_0 = \sum_{i=0}^{n} A_i \\ k=1 & I_1 = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i \\ \dots & \dots \\ k=n & I_n = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^n \end{array} \tag{5.2}$$

unde I_k $(k = \overline{0,n})$ pot fi imediat calculaţi

$$I_k = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad (k = \overline{0,n}). \tag{5.3}$$

Deci, după calculul lui I_k cu ajutorul formulelor (5.3), (5.2) se transformă într-un sistem de $n+1$ ecuaţii liniare cu $n+1$ necunoscute A_i, $(i = \overline{0,n})$ de determinant

$$D = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Acest sistem are soluţie unică, prin urmare A_i pot fi determinaţi în mod unic.

Exemplu 5.1.3 *Să se deducă o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Considerăm $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$

$$\int_0^1 dx = 1, \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Obţinem sistemul

$$\begin{aligned} 1 &= A_0 + A_1 + A_2 \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{4}A_2 \\ \frac{1}{3} &= \frac{1}{16}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{9}{16}A_2 \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul obţinem

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{3}.$$

Deci formula de cuadratură căutată este

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Observaţie 5.1.5 *Formula de cuadratură este de tip deschis şi este exactă pentru toate polinoamele de grad* ≤ 2.

5.2 Formulele de cuadratură Newton-Côtes

Ne propunem să calculăm, pentru o funcţie dată $y = f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Considerăm segmentul $[a, b]$ împărţit cu ajutorul punctelor echidistante

$$x_0 = a, \;\; x_i = a + ih, \;\; (i = \overline{1, n-1}), \;\; x_n = b, \;\; h = \frac{b-a}{n}.$$

Notăm prin y_i valorile funcţiei f în nodurile x_i, adică $y_i = f(x_i)$.

Înlocuim funcţia $y = f(x)$ prin polinomul de interpolare Lagrange, $L_n(x)$, corespunzător pentru a obţine o formulă de cuadratură aproximativă

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y_i$$

unde A_i sunt constante ce vor trebui determinate.

Fie deci

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Notăm

$$q = \frac{x-x_0}{h}.$$

Avem

$$\begin{aligned}
&\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = q-1\\
&\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0-2h}{h} = q-2\\
&\cdots\\
&\frac{x-x_n}{h} = \frac{x-x_0-nh}{h} = q-n
\end{aligned}$$

Pe de altă parte avem

$$\begin{array}{rcl}
x_i - x_0 = & x_0 + ih - x_0 & = ih\\
x_i - x_1 = & x_0 + ih - x_0 - h & = (i-1)h\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
x_i - x_{i-1} = & x_0 + ih - x_0 - (i-1)h & = h\\
x_i - x_{i+1} = & x_0 + ih - x_0 - (i+1)h & = (-1)\cdot h\\
x_i - x_{i+2} = & x_0 + ih - x_0 - (i+2)h & = (-1)\cdot 2h\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
x_i - x_n = & x_0 + ih - x_0 - nh & = (-1)\cdot(n-i)h
\end{array}$$

Deci

$$(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1}) = i!h^i$$

$$(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n) = (-1)^{n-i}h^{n-i}(n-i)!$$

$$(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n) = h^n q(q-1)\cdots(q-n) = h^n q^{[n+1]}.$$

Pe de altă parte

$$dq = \frac{dx}{h} \Leftrightarrow dx = hdq.$$

Pentru $x = x_0$ urmează $q = 0$, iar pentru $x = x_n$ urmează $q = n$.

$$\int_a^b y dx = \int_{x_0}^{x_n} L_n(x) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \int_{x_0}^{x_n} \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\frac{(-1)^{n-i} h}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \right),$$

unde

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq =$$

$$= (b-a) \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \right].$$

Notăm

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq, \quad i = \overline{0, n}.$$

Deci

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^{n} H_i y_i$$

unde

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad y_i = f(a+ih), \quad i = \overline{0, n}.$$

Se observă că avem

$$\sum_{i=0}^{n} H_i = 1,$$

iar $H_i = H_{n-i}$.

Observaţie 5.2.1 *Din formulele Newton-Côtes se obţine, pentru $n = 1$, formula trapezelor şi anume*

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}.$$

Deci

$$\int_{x_0}^{x_1} ydx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

Observaţie 5.2.2 *Din formulele Newton-Côtes, pentru $n = 2$, obţinem formula lui Simpson*

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q} dq = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q-1} dq = -\frac{1}{2} \int_0^2 \left(q^2 - 2q\right) dq = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1)dq = \frac{1}{6}.$$

Pe de altă parte $b - a = x_2 - x_0 = 2h$. Deci

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Observaţie 5.2.3 *Formulele trapezelor şi Simpson se pot generaliza pentru n şi respectiv $n = 2m$ puncte.*

5.3 Formula generalizată a trapezelor

Pentru a calcula

$$\int_a^b ydx$$

să împărţim intervalul de integrare $[a, b]$ în n părţi egale $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ şi să-i aplicăm pe fiecare interval formula trapezelor

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Deci

$$\int_a^b ydx = \int_{x_0}^{x_1} ydx + \int_{x_1}^{x_2} ydx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} ydx =$$

$$= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{h}{2}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right).$$

5.4 Formula generalizată a lui Simpson

Fie $n = 2m$ şi $y_i = f(x_i)$ cu $i = \overline{0, n}$,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}.$$

Deci

$$\int_a^b ydx = \int_{x_0}^{x_2} ydx + \int_{x_2}^{x_4} ydx + \cdots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} ydx =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})\right].$$

5.5 Evaluarea restului la formula trapezelor

Să notăm

$$R = \int_{x_0}^{x_1} ydx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

Presupunem $y \in C^2_{[a,b]}$. Deci

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} ydx - \frac{h}{2}\left[y(x_0) + y(x_0 + h)\right].$$

Derivând, avem

$$R'(h) = y(x_0 + h) - \frac{1}{2}\left[y(x_0) + y(x_0 + h)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[y(x_0 + h) - y(x_0)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h).$$

$$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_0 + h) - \frac{1}{2}y'(x_0 + h) - \frac{h}{2}y''(x_0 + h) = -\frac{h}{2}y''(x_0 + h).$$

În plus

$$R(0) = R'(0) = R''(0) = 0.$$

Integrând de la 0 la h şi aplicând teorema de medie

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h ty'(x_0 + t)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}y''(\xi_1)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}y''(\xi_1), \;\; \xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2 y''(\xi_1)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}y''(\xi)\int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12}y''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0+h).$$

Deci

$$R = -\frac{h^3}{12}y''(\xi).$$

Dacă
$y'' > 0$ — aproximaţie prin exces
$y'' < 0$ — aproximaţie prin lipsă.

5.6 Evaluarea restului la formula generalizată a trapezelor

Fie $y \in C^2_{[a,b]}$.

$$R = \int_{x_0}^{x_n} ydx - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} ydx - \frac{h}{2}(y_{i-1}-y_i)\right] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} y(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Considerăm media aritmetică

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y''(\xi_i) \Leftrightarrow \mu n = \sum_{i=1}^{n} y''(\xi_i).$$

Dar

$$m_2 \le \mu \le M_2.$$

Cum y'' este continuă pe $[a,b]$, rezultă că are proprietatea lui Darboux, deci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât $\mu = y''(\xi)$.

Deci avem

$$R = -\frac{nh^3}{12}y''(\xi) = -\frac{b-a}{12}h^2 y''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

5.7 Evaluarea restului formulei Simpson

Fie

$$R=\int_{x_0}^{x_2} ydx-\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),\quad y\in C^{(4)}_{[a,b]}.$$

Fixând punctul median x_1 şi $R=R(h)$, $(h\geq 0)$ avem

$$R(h)=\int_{x_1-h}^{x_1+h} ydx-\frac{h}{3}\left[y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)\right].$$

Derivând de trei ori pe $R(h)$ în raport cu h avem

$$R'(h)=[y(x_1+h)+y(x_1-h)]-\frac{1}{3}[y(x_1-h)+y(x_1+h)+4y(x_1)]-$$

$$-\frac{h}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]=\frac{2}{3}[y(x_1+h)+y(x_1-h)]-\frac{4}{3}y(x_1)-$$

$$-\frac{h}{3}[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)].$$

$$R''(h)=\frac{2}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]-\frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]-$$

$$-\frac{h}{3}\left[-y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]-\frac{h}{3}\left[-y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right].$$

$$R'''(h)=\frac{1}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right]-\frac{1}{3}\left[-y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right]-$$

$$-\frac{h}{3}\left[-y'''(x_1-h)+y'''(x_1+h)\right]=$$

$$=-\frac{h}{3}\left[-y'''(x_1+h)-y'''(x_1-h)\right]=-\frac{2h^2}{3}y^{(iv)}(\xi_3),$$

$\xi_3\in(x_1-h,x_1+h)$ şi $R(0)=R'(0)=R''(0)=R'''(0)=0$.

Integrând pe $R'''(h)$ şi aplicând teorema de medie avem

$$R''(h)=R''(0)+\int_0^h R'''(t)dt=-\frac{2}{3}\int_0^h t^2y^{(iv)}(\xi_3)dt=$$

$$=-\frac{2}{3}y^{(iv)}(\xi_2)\int_0^h t^2dt=-\frac{2}{9}h^3y^{(iv)}(\xi_2)$$

unde $\xi_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 y^{(iv)}(\xi_2)dt =$$
$$= -\frac{2}{9}y^{(iv)}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18}h^4 y^{(iv)}(\xi_1),$$

unde $\xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

$$R(h) = R(0) - \frac{1}{18}\int_0^h t^4 y^{(iv)}(\xi_1)dt = -\frac{1}{18}y^{(iv)}(\xi)\int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{90}y^{(iv)}(\xi),$$

unde $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

Deci
$$R = -\frac{h^5}{90}y^{(iv)}(\xi).$$

5.8 Evaluarea restului formulei lui Simpson generalizată

Fie $y \in C^4_{[a,b]}$ şi o diviziune în $2m$ ($m \in \mathbb{N}^\star$) intervale egale a lui $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_{2m} = b,$$

adică
$$h = \frac{b-a}{2m}.$$

Urmează
$$R = \int_a^b y dx - \frac{h}{3}\sum_{k=1}^m (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) =$$
$$= \sum_{k=1}^m \left[\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} y dx - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})\right] = -\frac{h^5}{90}y^{(iv)}(\xi_k),$$

unde $\xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$.

Notăm
$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m y^{(iv)}(\xi_k).$$

Urmează
$$\sum_{k=1}^m y^{(iv)}(\xi_k) = m\mu.$$

Funcţia $y^{(iv)}(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi prin urmare are proprietatea lui Darboux pe acest interval. Există deci $\xi \in (a,b)$ astfel încât

$$\mu = y^{(iv)}(\xi).$$

Deci

$$\sum_{k=1}^{m} y^{(iv)}(\xi_k) = m y^{(iv)}(\xi).$$

Prin urmare

$$R = -\frac{mh^5}{90} y^{(iv)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(iv)}(\xi).$$

Fie $M_4 = \max |y^{(iv)}(x)|$ şi $\varepsilon > 0$ eroarea admisă. Deci

$$(b-a)\frac{h^4}{180} M_4 < \varepsilon,$$

adică

$$h < \sqrt[4]{\frac{180\,\varepsilon}{(b-a)M_4}}.$$

Exemplu 5.8.1 *Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Simpson integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

cu $n = 5$ şi apoi să se evalueze eroarea produsă.

i	x_i	y_{2j-1}	y_{2j}
0	0		$1,00000$
1	$0,1$	$0,90909$	
2	$0,2$		$0,83333$
3	$0,3$	$0,76923$	
4	$0,4$		$0,71429$
5	$0,5$	$0,66667$	
6	$0,6$		$0,62500$
7	$0,7$	$0,58824$	
8	$0,8$		$0,55556$
9	$0,9$	$0,52632$	
10	1		$0,50000$
$\sum$		$3,45955$	$2,72818$

$$I \approx \frac{0,1}{3}(1,00000 + 0,50000 + 4 \cdot 3,45955 + 2 \cdot 2,72818) = 0,69315.$$

Distingem două feluri de erori
a) de rotunjire

$$R_{rot} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$$

b) de metodă

$$y = \frac{1}{1+x},\ y' = -\frac{1}{(1+x)^2},\ y'' = \frac{2}{(1+x)^3},\ y''' = -\frac{6}{(1+x)^4},\ y^{(iv)} = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y^{(iv)}(x)| = 24.$$

Deci

$$|R_2| < 1 \cdot \frac{(0,1)^4}{180} \cdot 24 = 1,3 \cdot 10^{-5}.$$

Deci eroarea va fi

$$R = R_{rot} + |R_2| = 0,5 \cdot 10^{-5} + 1,3 \cdot 10^{-5} = 1,8 \cdot 10^{-5} < 0,00002.$$

Deci

$$I = 0,69315 \pm 0,00002.$$

5.9 Formula de cuadratură a lui Cebîşev

Se consideră formula de cuadratură

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i), \tag{5.4}$$

unde B_i sunt constante.

Constantele B_i şi nodurile de interpolare t_i ($i = \overline{1,n}$) vor fi supuse următoarelor condiţii:

a) constantele B_i sunt egale între ele

b) formula de cuadratură este exactă pentru orice polinom până la gradul n inclusiv.

Deci, din a), urmează

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_n = B.$$

Deci (5.4) devine

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = B\sum_{i=1}^{n} f(t_i). \tag{5.5}$$

Pentru $f(t) = 1$ rezultă $2 = nB$ adică

$$B = \frac{2}{n} \tag{5.6}$$

Relaţia (5.5), în funcţie de relaţia (5.6), devine

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i). \tag{5.7}$$

Din condiţia b) rezultă că, pentru $f(t) = t, t^2, \ldots, t^n$, formula (5.7) este exactă, adică

$$\begin{aligned}
&t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 0\\
&t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 = \frac{n}{3}\\
&t_1^3 + t_2^3 + \cdots + t_n^3 = 0\\
&t_1^4 + t_2^4 + \cdots + t_n^4 = \frac{n}{5}\\
&\ldots\\
&t_1^n + t_2^n + \cdots + t_n^n = \frac{n[1-(-1)^{n+1}]}{2(n+1)}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Deci, determinarea punctelor $t_1, t_2, \ldots, t_n$ se reduce la determinarea rădăcinilor reale ale unei ecuaţii algebrice.

Pentru $n = 8$ şi $n \geq 10$, S. Bernstein a arătat că sistemul nu admite toate rădăcinile reale.

Observaţie 5.9.1 *Pentru a aplica formula de cuadratură a lui Cebîşev integralelor de forma*

$$\int_a^b f(x)dx$$

facem substituţia

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

care "duce" *intervalul* $[a, b]$ *în* $[-1, 1]$.

Deci

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

unde

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i.$$

Exemplu 5.9.1 *Să deducem o formulă Cebîşev cu trei noduri, adică* $n = 3$. *Sistemul (5.8) devine*

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 &= 1 \\ t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Fie

$$s_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad s_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3, \quad s_3 = t_1t_2t_3.$$

Relaţiile (5.9) devin

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\left[(t_1 + t_2 + t_3)^2 - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)\right] = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

Pe de altă parte avem identitatea

$$(t_1 + t_2 + t_3)^3 = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + 3(t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_1)$$

sau, ţinând conte de relaţiile (5.9), avem

$$0 = 0 + 3(-t_3)(-t_1)(-t_2)$$

sau

$$s_3 = t_1t_2t_3 = 0.$$

Deci putem construi ecuaţia de gradul al treilea

$$t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 = 0$$

sau

$$t^3 - \frac{1}{2}t = 0.$$

Deci nodurile vor fi

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci formula de cuadratură poate fi scrisă:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

5.10 Formulele de cuadratură ale lui Gauss

Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Să determinăm punctele $t_1, t_2, \ldots, t_n$ şi coeficienţii A_1, $A_2, \ldots, A_n$ astfel încât formula de cuadratură

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \tag{5.10}$$

să fie exactă pentru orice polinom $f(t)$ de grad N cât mai mare posibil.

Deoarece avem $2n$ necunoscute t_i şi A_i $(i = \overline{1,n})$, atunci polinomul trebuie să fie de grad $2n-1$ deoarece acesta este unic determinat de $2n$ coeficienţi. Deci $N = 2n - 1$.

Pentru a avea egalitatea (5.10) trebuie ca ea să fie verificată pentru

$$f(t) = 1, t, t^2, \ldots, t^{2n-1}.$$

În adevăr, punând

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k, \quad k = \overline{0, 2n-1}$$

şi

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k$$

avem

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \left(\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k \right) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i).$$

Ţinând cont de relaţiile

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & \text{pentru } k \text{ număr par} \\ 0 & \text{pentru } k \text{ număr impar} \end{cases}$$

rezultă

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} A_i = 2 \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0 \\ &\cdots \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \\ &\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pentru a rezolva acest sistem vom folosi polinomul

$$f(t) = t^k P_n(t),$$

unde $k = \overline{0, n-1}$. Gradul acestui polinom nu depăşeşte pe $2n-1$ şi trebuie să verifice sistemul (5.11). Dar, din proprietatea de ortogonalitate a polinoamelor Legendre, avem

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t) dt = 0$$

pentru $k < n$ şi

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \tag{5.12}$$

pentru $k = \overline{0, n-1}$.

Dacă considerăm $P_n(t_i) = 0$ pentru $i = \overline{1, n}$ egalităţile (5.12) vor fi adevărate oricare ar fi valorile A_i.

Deoarece toate rădăcinile polinoamelor Legendre sunt reale, distincte şi cuprinse în intervalul $(-1, 1)$, cunoscând aceste valori şi pornind de la sistemul liniar (5.11) al primelor n necunoscute putem determina A_i cu $i = \overline{1, n}$.

Determinantul acestui subsistem este Vandermonde şi este

$$D = \prod_{i>j}(t_i - t_j) \neq 0$$

şi prin urmare determinarea lui A_i este univocă.

Exemplu 5.10.1 *Să se deducă formula lui Gauss în cazul a trei noduri.*

Polinomul Legendre de gradul al treilea este

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

şi are rădăcinile

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0,774597, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0,774597.$$

Pentru a determina coeficienţii A_1, A_2 *şi* A_3 *avem sistemul*

$$\begin{array}{rcl} A_1 + & A_2 & + A_3 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + & & + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 = 0 \\ \frac{3}{5}A_1 + & & + \frac{3}{5}A_3 = \frac{2}{3} \end{array}$$

Rezolvând prin Cramer se obţine

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, \quad A_2 = \frac{8}{9}.$$

Deci

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Observaţie 5.10.1 *Abscisele (nodurile) formulei Gauss sunt în general iraţionale, dar acest dezavantaj este compensat de precizia ridicată în prezenţa unui număr mic de abscise.*

Observaţie 5.10.2 *Pentru stabilirea unei formule de cuadratură de tip Gauss pentru*

$$\int_a^b f(x)dx$$

se face schimbarea de variabile

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

şi avem

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

Aplicând ultimei integrale formulele lui Gauss avem

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i),$$

unde

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i,$$

unde t_i, $(i = \overline{1,n})$ *sunt rădăcinile polinoamelor de tip Legendre* $P_n(t)$.