Problema 1 *Se consideră problema de programare liniară*

$$PL-\min:\begin{cases}\min(-3x_1+4x_2-6x_3-x_4+x_5)\\ \begin{array}{rrrrrcr} x_1 & -2x_2 & -x_3 & -2x_4 & -x_5 & = & -2\\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 6\\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = & -1\end{array}\\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5}\end{cases} \qquad (1)$$

Să se rezolve folosind algoritmul Simplex.

Soluţie. Mai întâi verificăm dacă problema este în formă standard:

- problema este problemă de programare liniară de minim,
- toate restricţiile sunt ecuaţii,
- toate necunoscutele sunt supuse condiţiilor de nenegativitate,
- NU toate restricţiile (ecuaţiile) au termenii liberi nenegativi,

deci vom înmulţi restricţiile 1 şi 3 cu -1. Obţinem problema de programare liniară în formă standard

$$PL-\min:\begin{cases}\min(-3x_1+4x_2-6x_3-x_4+x_5)\\ \begin{array}{rrrrrcr} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 2\\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 6\\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -3x_4 & +2x_5 & = & 1\end{array}\\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5}.\end{cases} \qquad (2)$$

Pentru a putea aplica algoritmul Simplex, avem nevoie de o soluţie admisibilă de bază. Pentru a determina această soluţie vom rezolva, în prima fază, problema de programare liniară asociată problemei (2).

Scriem problema de programare liniară asociată:

- Pentru fiecare restricţie a problemei iniţiale adăugăm o necunoscută asociată nenegativă. Avem 3 restricţii, deci vor fi 3 necunoscute asociate: x_1^a, x_2^a, x_3^a.
- Funcţia obiectiv a problemei asociate este suma necunoscutelor asociate.

Obţinem

$$PL^a - \min : \begin{cases} \min(x_1^a + x_2^a + x_3^a) \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_1^a = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_2^a = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_3^a = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}, x_i^a \geq 0, i = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (3)$$

Rezolvarea problemei de programare liniară asociată (3) se face folosind tot algoritmul Simplex.

Pentru această problemă avem o soluţie admisibilă de bază:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, x_1^a = 2, x_2^a = 6, x_3^a = 1. \quad (4)$$

Rezolvarea problemelor de programare liniară, cu ajutorul algoritmului Simplex, presupune prelucrarea mai multor tabele care au următoarea structură:

$$\begin{array}{ccc|cccccc}
 & & & c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \\
 & & & x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\
\cline{3-9}
 & & \multicolumn{1}{|c|}{z_{00}^p} & \Delta_1^p & \Delta_2^p & \dots & \Delta_j^p & \dots & \multicolumn{1}{c|}{\Delta_n^p} \\
\cline{3-9}
c_{i_1^p} & i_1^p & \multicolumn{1}{|c|}{x_1^p} & z_{11}^p & z_{12}^p & \dots & z_{1j}^p & \dots & \multicolumn{1}{c|}{z_{1n}^p} \\
c_{i_2^p} & i_2^p & \multicolumn{1}{|c|}{x_2^p} & z_{21}^p & z_{22}^p & \dots & z_{2j}^p & \dots & \multicolumn{1}{c|}{z_{2n}^p} \\
\vdots & \vdots & \multicolumn{1}{|c|}{\vdots} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} \\
c_{i_i^p} & i_i^p & \multicolumn{1}{|c|}{x_i^p} & z_{i1}^p & z_{i2}^p & \dots & z_{ij}^p & \dots & \multicolumn{1}{c|}{z_{in}^p} \\
\vdots & \vdots & \multicolumn{1}{|c|}{\vdots} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} \\
c_{i_m^p} & i_m^p & \multicolumn{1}{|c|}{x_m^p} & z_{m1}^p & z_{m2}^p & \dots & z_{mj}^p & \dots & \multicolumn{1}{c|}{z_{mn}^p} \\
\cline{3-9}
\end{array}$$

unde $c_j, x_j,\ j \in \overline{1,n}$ sunt coeficienţii funcţiei obiectiv, respectiv necunoscutele problemei de programare liniară. Elementele $c_{i_i^p}$ sunt coeficienţii din funcţia obiectiv corespunzători necunoscutelor $x_{i_i^p}$ (asociate coloanelor i_i^p care formează baza), $i \in \overline{1,m}$, care determină elementele bazei de la pasul curent p, $p \in \mathbb{N}$. Celelalte elemente sunt descrise în curs la secţiunea 1.3.

Prima linie şi prima coloană sunt utile doar la completarea primului tabel de la fiecare problemă: problema asociată şi problema iniţială.

Generăm primul tabel pentru problema asociată:

- Necunoscutele sunt $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1^a, x_2^a, x_3^a$.

- Coeficienţii funcţiei obiectiv a problemei asociate sunt $c_1^a = c_2^a = c_3^a = c_4^a = c_5^a = 0$, $c_6^a = c_7^a = c_8^a = 1$.

- La primul tablou al rezolvării problemei asociate, baza este formată din coloanele $6, 7, 8$ corespunzătoare necunoscutelor asociate x_1^a, x_2^a, x_3^a.

- Soluţia admisibilă de bază de la pasul 0 este cea menţionată în (4).

- Elementele z_{ij}^0 $(i = \overline{1,3}, j = \overline{1,8})$ sunt elementele matricii sistemului restricţiilor problemei (3).

- Determinăm elementele $\Delta_j^0, j = \overline{1,8}$: conform teoriei,

$$\Delta_j^p = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k^p} z_{kj}^p - c_j, \quad j = \overline{1,n},$$

deci, în cazul nostru,

$$\Delta_j^0 = \sum_{k=1}^{3} c^a_{i_k^0} z_{kj}^0 - c_j^a, \quad j = \overline{1,8}.$$

Tot din teorie avem $\Delta_6^0 = \Delta_7^0 = \Delta_8^0 = 0$, deoarece coloanele $6, 7, 8$ se regăsesc în bază. Determinăm celelalte elemente:

$$\Delta_1^0 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 0 = 2,$$

$$\Delta_2^0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 - 0 = 8,$$

$$\Delta_3^0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 0 = -1,$$

$$\Delta_4^0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) - 0 = 0,$$

$$\Delta_5^0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 0 = 5.$$

- Valoarea funcţiei obiectiv, conform teoriei, este

$$z_{00}^p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^p = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k^p} x_k^p.$$

În cazul nostru, pentru problema asociată, avem

$$z_{00}^0 = \sum_{j=1}^{8} c_j^a x_j^0 = \sum_{k=1}^{3} c^a_{i_k^0} x_k^0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 9.$$

Obţinem următorul tabel

			0	0	0	0	0	1	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a
		9	2	8	−1	0	5	0	0	0
1	x_1^a	2	−1	2	1	2	1	1	0	0
1	x_2^a	6	2	5	−1	1	2	0	1	0
1	x_3^a	1	1	1	−1	−3	2	0	0	1

În coloana a doua, în care se trec indicii coloanelor care formează baza (în cazul nostru $6, 7, 8$), am scris, pentru o mai uşoară înţelegere, necunoscutele corespunzătoare respectivelor coloane (x_1^a, x_2^a, x_3^a).

Analizăm tabelul conform algoritmului Simplex:

- Nu toate valorile Δ_j, $j \in \overline{1,8}$, sunt negative sau nule, deci nu avem soluţie optimă.
- Pentru niciuna dintre coloanele pentru care $\Delta_j > 0$, $j \in \overline{1,8}$, nu avem $z_{kj} \leq 0, \forall k \in \overline{1,3}$. Deci nu avem optim infinit.

- Valoarea maximă pentru Δ_j, $j \in \overline{1,8}$, este $\Delta_2 = 8$. Deci în bază va intra coloana 2.
- Pentru coloana 2 calculăm
$$\min_{k=\overline{1,3}} \left\{ \frac{x_k}{z_{k2}} \middle| z_{k2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{6}{5}, \frac{1}{1} \right\} = 1.$$
Avem două variante: $k = 1$ şi $k = 3$. Alegem prima variantă, $k = 1$. Deci, din bază va ieşi coloana 6 corespunzătoare necunoscutei x_1^a.
- Prin urmare, pivotul este $z_{12} = 2$, situat în linia 1 şi coloana 2 a zonei centrale.
- Celelalte elemente ale tabelului se determină cu lema substituţiei:
  - linia pivotului (în cazul nostru linia lui x_1^a) se împarte la pivot (2);
  - coloana pivotului (corespunzătoare lui x_2) se completează cu 0, inclusiv elementul Δ_2 (din linia elementelor $\Delta_j, j = \overline{1,8}$);
  - toate celelalte elemente, inclusiv z_{00}, se calculează cu regula dreptunghiului:

$$z_{00}^1 = \frac{z_{00}^0 z_{12}^0 - x_1^0 \Delta_2^0}{z_{12}^0} = \frac{9 \cdot 2 - 2 \cdot 8}{2} = 1,$$

$$\Delta_j^1 = \frac{\Delta_j^0 z_{12}^0 - z_{1j}^0 \Delta_2^0}{z_{12}^0}, \forall j \in \overline{1,8},\ j \neq 2,\ \text{de exemplu } \Delta_3^1 = \frac{-1 \cdot 2 - 1 \cdot 8}{2} = -5,$$

$$x_i^1 = \frac{x_i^0 z_{12}^0 - x_1^0 z_{i2}^0}{z_{12}^0}, \forall i \in \overline{1,3},\ i \neq 1,\ \text{de exemplu } x_3^1 = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2} = 0,$$

$$z_{ij}^1 = \frac{z_{ij}^0 z_{12}^0 - z_{1j}^0 z_{i2}^0}{z_{12}^0}, \forall i \in \overline{1,3},\ i \neq 1,\ \forall j \in \overline{1,8}, j \neq 2,\ \text{de exemplu}$$

$$z_{34}^1 = \frac{-3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2} = -4.$$

Obţinem tabelul

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a
	1	6	0	-5	-8	1	-4	0	0
x_2	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_2^a	1	$\frac{9}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	0
x_3^a	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1

Analizăm tabelul conform algoritmului Simplex:

- Nu avem $\Delta_j \leq 0, \forall j \in \overline{1,8}$, deci nu avem soluţie optimă.
- Pentru niciuna dintre coloanele pentru care $\Delta_j > 0$, $j \in \overline{1,8}$, nu avem $z_{kj} \leq 0, \forall k \in \overline{1,3}$. Deci nu avem optim infinit.
- Valoarea maximă pentru Δ_j, $j \in \overline{1,8}$, este $\Delta_1 = 6$. Deci în bază va intra coloana 1.

- Pentru coloana 1 calculăm

$$\min_{k=\overline{1,3}}\left\{\frac{x_k}{z_{k1}}\,\middle|\, z_{k1}>0\right\}=\min\left\{\frac{1}{\frac{9}{2}},\frac{0}{\frac{3}{2}}\right\}=0.$$

  Deci, din bază va ieşi coloana 8 corespunzătoare necunoscutei x_3^a.

- Prin urmare, pivotul este $z_{31}=\frac{3}{2}$, situat în linia 3 şi coloana 1 a zonei centrale.

- Celelalte elemente ale tabelului se determină cu lema substituţiei:

  - linia pivotului (în cazul nostru linia lui x_3^a) se împarte la pivot ($\frac{3}{2}$);
  - coloana pivotului (corespunzătoare lui x_1) se completează cu 0, inclusiv elementul Δ_1 (din linia elementelor $\Delta_j, j=\overline{1,8}$);
  - toate celelalte elemente, inclusiv z_{00}, se calculează cu regula dreptunghiului:

$$z_{00}^2=\frac{z_{00}^1 z_{31}^1-x_3^1\Delta_1^1}{z_{31}^0}=\frac{1\cdot\frac{3}{2}-0\cdot 6}{\frac{3}{2}}=1,$$

$$\Delta_j^2=\frac{\Delta_j^1 z_{31}^1-z_{3j}^1\Delta_1^1}{z_{31}^1},\forall j\in\overline{1,8},\ j\neq 1,\ \text{de exemplu } \Delta_4^2=\frac{-8\cdot\frac{3}{2}-(-4)\cdot 6}{\frac{3}{2}}=8,$$

$$x_i^2=\frac{x_i^1 z_{31}^1-x_3^1 z_{i1}^1}{z_{31}^1},\forall i\in\overline{1,3},\ i\neq 3,\ \text{de exemplu } x_2^2=\frac{1\cdot\frac{3}{2}-0\cdot\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}=1,$$

$$z_{ij}^2=\frac{z_{ij}^1 z_{31}^1-z_{3j}^1 z_{i1}^1}{z_{31}^1},\forall i\in\overline{1,3},\ i\neq 3,\ \forall j\in\overline{1,8}, j\neq 1,\ \text{de exemplu}$$

$$z_{14}^2=\frac{1\cdot\frac{3}{2}-(-4)\cdot(-\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}.$$

Obţinem tabelul

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a
	1	0	0	1	8	-5	-2	0	-4
x_2	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_2^a	1	0	0	1	8	-5	-1	1	-3
x_1	0	1	0	-1	$-\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

Analizăm tabelul conform algoritmului Simplex:

- Nu avem $\Delta_j\leq 0$, $\forall j\in\overline{1,8}$, deci nu avem soluţie optimă.

- Pentru niciuna dintre coloanele pentru care $\Delta_j>0$, $j\in\overline{1,8}$, nu avem $z_{kj}\leq 0,\forall k\in\overline{1,3}$. Deci nu avem optim infinit.

- Valoarea maximă pentru Δ_j, $j\in\overline{1,8}$, este $\Delta_4=8$. Deci în bază va intra coloana 4.

- Pentru coloana 4 calculăm

$$\min_{k=\overline{1,3}} \left\{ \frac{x_k}{z_{k4}} \middle| z_{k4} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{8}.$$

  Deci, din bază va ieşi coloana 7 corespunzătoare necunoscutei x_2^a.

- Prin urmare, pivotul este $z_{24} = 8$, situat în linia 2 şi coloana 4 a zonei centrale.

- Celelalte elemente ale tabelului se determină cu lema substituţiei, similar cu paşii precedenţi.

Obţinem următorul tabel

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a
	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
x_2	$\frac{25}{24}$	0	1	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{19}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
x_4	$\frac{3}{24}$	0	0	$\frac{3}{24}$	1	$-\frac{15}{24}$	$-\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$-\frac{9}{24}$
x_1	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Analizăm tabelul şi observăm că $\Delta_j \leq 0, \forall j \in \overline{1,8}$, deci avem soluţie optimă pentru problema asociată:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{25}{24}, x_3 = 0, x_4 = \frac{3}{24}, x_5 = x_1^a = x_2^a = x_3^a = 0.$$

Valoarea funcţiei obiectiv a problemei asociate este $z_{00}^3 = 0$, deci problema iniţială are soluţii admisibile. (Dacă valoarea funcţiei obiectiv a problemei asociate este nenulă, atunci problema iniţială nu are soluţii admisibile.)

În baza pentru care s-a obţinut soluţia optimă sunt numai coloane care corespund necunoscutelor iniţiale, prin urmare soluţia admisibilă de bază este

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{25}{24}, x_3 = 0, x_4 = \frac{3}{24}, x_5 = 0,$$

iar baza este formată din coloanele corespunzătoare necunoscutelor x_2, x_4, x_1. (Dacă în baza pentru care s-a obţinut soluţia optimă sunt şi coloane corespunzătoare necunoscutelor asociate, acestea se înlocuiesc cu coloane corespunzătoare necunoscutelor iniţiale folosind lema substituţiei.)

Revenim la problema iniţială. Pentru a genera primul tabel al problemei iniţiale, pornim de la tabelul problemei asociate pentru care s-a obţinut soluţia optimă, eliminăm coloanele corespunzătoare necunoscutelor asociate şi ştergem elementele $\Delta_j, j = \overline{1,n}$ şi valoarea funcţiei obiectiv z_{00}.

Pentru a calcula mai uşor elementele primului tabel al problemei iniţiale scriem, ca la primul tabel al problemei asociate, coeficienţii funcţiei obiectiv a problemei iniţiale.

Determinăm valoarea funcţiei obiectiv a problemei iniţiale, pentru soluţia admisibilă pe care am obţinut-o cu problema asociată, şi elementele $\Delta_j, j = \overline{1,5}$ utilizând aceleaşi formule cu care le-am calculat pentru primul tabel al rezolvării problemei asociate:

$$z_{00}^0 = 4 \cdot \frac{25}{24} + (-1) \cdot \frac{3}{24} + (-3) \cdot \frac{1}{3} = \frac{73}{24}, \ \ \Delta_1^0 = \Delta_2^0 = \Delta_4^0 = 0,$$

$$\Delta_3^0 = 4 \cdot \frac{1}{24} + (-1) \cdot \frac{3}{24} + (-3) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{193}{24},$$

$$\Delta_5^0 = 4 \cdot \frac{19}{24} + (-1) \cdot \left(-\frac{15}{24}\right) + (-3) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{115}{24}.$$

Obţinem tabelul

			-3	4	-6	-1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		$\frac{73}{24}$	0	0	$\frac{193}{24}$	0	$\frac{115}{24}$
4	x_2	$\frac{25}{24}$	0	1	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{19}{24}$
-1	x_4	$\frac{3}{24}$	0	0	$\frac{3}{24}$	1	$-\frac{15}{24}$
-3	x_1	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$

Analizăm tabelul conform algoritmului Simplex:

- Nu avem $\Delta_j^0 \leq 0$, $\forall j \in \overline{1,5}$, deci nu avem soluţie optimă.
- Pentru niciuna dintre coloanele pentru care $\Delta_j^0 > 0$, $j \in \overline{1,5}$, nu avem $z_{kj}^0 \leq 0, \forall k \in \overline{1,3}$. Deci nu avem optim infinit.
- Valoarea maximă pentru Δ_j^0, $j \in \overline{1,5}$, este $\Delta_3^0 = \frac{193}{24}$. Deci în bază va intra coloana 3.
- Pentru coloana 3 calculăm

$$\min_{k=\overline{1,3}} \left\{ \frac{x_k^0}{z_{k3}^0} \,\middle|\, z_{k3}^0 > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{\frac{25}{24}}{\frac{1}{24}}, \frac{\frac{3}{24}}{\frac{3}{24}} \right\} = 1.$$

  Deci, din bază va ieşi coloana 4 corespunzătoare necunoscutei x_4.

- Prin urmare, pivotul este $z_{23} = \frac{3}{24}$, situat în linia 2 şi coloana 3 a zonei centrale.
- Celelalte elemente ale tabelului se determină cu lema substituţiei, similar cu paşii precedenţi.

Obţinem următorul tabel

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-5	0	0	0	$-\frac{193}{3}$	45
x_2	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1
x_3	1	0	0	1	8	-5
x_1	1	1	0	0	$\frac{16}{3}$	-4

Analizăm tabelul conform algoritmului Simplex:

- Nu avem $\Delta_j^1 \leq 0$, $\forall j \in \overline{1,5}$, deci nu avem soluţie optimă.
- Pentru niciuna dintre coloanele pentru care $\Delta_j^1 > 0$, $j \in \overline{1,5}$, nu avem $z_{kj}^1 \leq 0, \forall k \in \overline{1,3}$. Deci nu avem optim infinit.

- Valoarea maximă pentru Δ_j^1, $j \in \overline{1,5}$, este $\Delta_5^1 = 45$. Deci în bază va intra coloana 5.
- Pentru coloana 5 calculăm

$$\min_{k=\overline{1,3}} \left\{ \frac{x_k^1}{z_{k5}^1} \middle| z_{k5}^1 > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 1.$$

  Deci, din bază va ieşi coloana 2 corespunzătoare necunoscutei x_2.
- Prin urmare, pivotul este $z_{15} = 1$, situat în linia 1 şi coloana 5 a zonei centrale.
- Celelalte elemente ale tabelului se determină cu lema substituţiei, similar cu paşii precedenţi.

Obţinem tabelul

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-50	0	-45	0	$-\frac{148}{3}$	0
x_5	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1
x_3	6	0	5	1	$\frac{19}{3}$	0
x_1	5	1	4	0	4	0

Analizând tabelul, observăm că $\Delta_j^2 \leq 0$, $\forall j \in \overline{1,5}$, deci am obţinut soluţie optimă. Ne oprim şi recuperăm soluţia

$$x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1.$$

Valoarea funcţiei obiectiv este $f = -50$.