1.1 Preliminarii

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}),$$

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}), \quad \sum_{j=1}^{n} a^j x_j \le b, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \ i = \overline{1,m}, \qquad Ax \le b$$

Lema 1.1.1 *Dintre sistemele de ecuaţii linare*

$$Ax = b \tag{1.1}$$

şi

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} u & = 0 \\ b^{\mathrm{T}} u & = c, \quad c \neq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

unul şi numai unul are soluţie.

Demonstraţie. Cum $c \neq 0$ avem

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} = \operatorname{rang} A + 1$$

Dacă ecuaţia (1.1) are soluţie, atunci

$$\operatorname{rang}(A, b) = \operatorname{rang} A \Rightarrow \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \operatorname{rang} A.$$

Deci

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} = \operatorname{rang} A + 1 = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + 1$$

prin urmare sistemul (1.2) nu are soluţie.

Dacă (1.1) nu are souţie, atunci

$$\operatorname{rang}(A, b) = \operatorname{rang} A + 1 \Rightarrow \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix},$$

adică sistemul (1.2) are soluţie.

Lema 1.1.2 (Farkas–Minkowski) *Dintre sistemele de inecuaţii liniare*

$$\begin{cases} Ax & = b \\ x & \ge 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

şi

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} u & \ge 0 \\ b^{\mathrm{T}} u & < 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

unul şi numai unul are soluţie.

Demonstraţie. Dacă $b = 0$, atunci sistemul (1.3) are soluţia $x = 0$. Urmează $b^{\mathrm{T}} u = 0$, $\forall u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$, deci sistemul (1.4) nu are soluţie ($b^{\mathrm{T}} u < 0$).

Fie acum $b \neq 0$. Verificăm mai întâi că sistemele nu pot fi simultan compatibile.

Presupunem prin absurd că există $\tilde{x}$ soluţie pentru (1.3) şi $\bar{u}$ soluţie pentru sistemul (1.4). Atunci

$$A\tilde{x} = b, \ \ \tilde{x} \ge 0, \ \ A^{\mathrm{T}}\bar{u} \ge 0, \ \ b^{\mathrm{T}}\bar{u} < 0. \tag{1.5}$$

Înmulţind prima relaţie din (1.5) cu $\bar{u}^{\mathrm{T}}$ la stânga obţinem

$$\bar{u}^{\mathrm{T}}(A\tilde{x}) = \bar{u}^{\mathrm{T}}b = \left(\bar{u}^{\mathrm{T}}b\right)^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}\bar{u} < 0$$

care contrazice

$$\bar{u}^{\mathrm{T}}A\tilde{x} = \left(\bar{u}^{\mathrm{T}}A\tilde{x}\right)^{\mathrm{T}} = \tilde{x}^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}\bar{u}\right) \geq 0$$

Prin urmare
[(1.3) – compatibil]$\Rightarrow$ [(1.4) – incompatibil] şi
[(1.4) – compatibil]$\Rightarrow$ [(1.3) – incompatibil]

Să demonstrăm acum că, dacă (1.3) este incompatibil, atunci sistemul (1.4) este compatibil. Dacă sistemul (1.3) este incompatibil atunci:

a) sistemul de ecuaţii $Ax = b$ nu are soluţie *sau*

b) sistemul de ecuaţii $Ax = b$ are soluţie dar nu are soluţie nenegativă.

Cazul a) Dacă sistemul $Ax = b$ este incompatibil, atunci, conform Lemei 1.1.1 sistemul

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}u &= 0 \\ b^{\mathrm{T}}u &= c, \quad c \neq 0 \end{cases}$$

este compatibil. Este suficient să alegem $c < 0$ şi obţinem că (1.4) este compatibil.

Cazul b) Sistemul $Ax = b$ are cel puţin o soluţie, dar nu are soluţii nenegative. Verificăm că sistemul (1.4) este compatibil prin inducţie după n, numărul de necunoscute.

Pentru $n = 1$ fie $x = (x_1)$ o soluţie. Conform ipotezei $x_1 < 0$. Avem

$$A = a^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad Ax = b \Leftrightarrow a^1x = b \Leftrightarrow a^1x_1 = b \Rightarrow a^1 = \frac{1}{x_1}b$$

Alegem $u = -b$ şi obţinem

$$A^{\mathrm{T}}u = (a^1)^{\mathrm{T}}u = \left(\frac{1}{x_1}b\right)^{\mathrm{T}}(-b) = -\frac{1}{x_1}b^{\mathrm{T}}b > 0,$$

$$b^{\mathrm{T}}u = b^{\mathrm{T}}(-b) = -b^{\mathrm{T}}b = -\sum_{i=1}^{m} b_i^2 < 0,$$

adică sistemul (1.4) este compatibil.

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $n - 1$. Verificăm că este adevărată şi pentru n. Conform ipotezei sistemul

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n-1} a^j x_j = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

nu poate avea soluţii nenegative. Dacă $x' = (x_1' \ \ x_2' \ \ \ldots \ \ x_{n-1}')^{\mathrm{T}}$ ar fi o soluţie nenegativă a sistemului (1.6) atunci $x = (x_1' \ \ x_2' \ \ \ldots \ \ x_{n-1}' \ \ 0)^{\mathrm{T}}$ ar fi o soluţie pentru sistemul (1.3) ceea ce ar contrazice ipoteza de inducţie. Prin urmare sistemul

$$\begin{cases} (a^j)^{\mathrm{T}}u \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ b^{\mathrm{T}}u < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

are cel puţin o soluţie, fie aceasta u_0.

Dacă $(a^n)^{\mathrm{T}}u_0 \geq 0$ atunci u_0 este soluţie şi pentru sistemul (1.4).

Dacă $(a^n)^{\mathrm{T}}u_0 < 0$ definim un alt sistem:

$$\tilde{a}^j = a^j + \lambda_j a^n, \qquad \lambda_j = -\frac{u_0^{\mathrm{T}}a^j}{u_0^{\mathrm{T}}a^n} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

$$\tilde{b} = b + \lambda_0 a^n, \qquad \lambda_0 = -\frac{u_0^{\mathrm{T}} b}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} < 0.$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}^j y_j = \tilde{b} \tag{1.8}$$

care nu are soluţii nenegative. (Dacă sistemul (1.8) ar avea soluţii nenegative, atunci, scriindu-l sub forma

$$\sum_{j=1}^{n-1} a^j y_j + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j y_j - \lambda_0 \right) a^n = b,$$

pentru $a^n = 0$, am obţine o soluţie nenegativă a sistemului (1.6), ceea ce ar contrazice ipoteza.)

Conform presupunerii, sistemul

$$\begin{cases} (\tilde{a}^j)^{\mathrm{T}} u \geq 0, & 1 \leq j \leq n-1 \\ \tilde{b}^{\mathrm{T}} u < 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

are cel puţin o soluţie $\bar{u}$.

Fie

$$\tilde{u} = \bar{u} - \frac{\bar{u}^{\mathrm{T}} a^n}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} u_0.$$

Avem:

$$\tilde{u}^{\mathrm{T}} a^j = \bar{u}^{\mathrm{T}} a^j - \frac{\bar{u}^{\mathrm{T}} a^n}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} u_0^{\mathrm{T}} a^j = \bar{u}^{\mathrm{T}} a^j - \frac{u_0^{\mathrm{T}} a^j}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} \bar{u}^{\mathrm{T}} a^n = \bar{u}^{\mathrm{T}} \left(a^j - \frac{u_0^{\mathrm{T}} a^j}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} a^n \right) = \bar{u}^{\mathrm{T}} \tilde{a}^j \geq 0, \ j = \overline{1, n-1}$$

$$\tilde{u}^{\mathrm{T}} a^n = \bar{u}^{\mathrm{T}} a^n - \frac{\bar{u}^{\mathrm{T}} a^n}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} u_0^{\mathrm{T}} a^n = \bar{u}^{\mathrm{T}} a^n - \bar{u}^{\mathrm{T}} a^n = 0$$

$$\tilde{u}^{\mathrm{T}} b = \bar{u}^{\mathrm{T}} b - \frac{\bar{u}^{\mathrm{T}} a^n}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} u_0^{\mathrm{T}} b = \bar{u}^{\mathrm{T}} b - \frac{u_0^{\mathrm{T}} b}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} \bar{u}^{\mathrm{T}} a^n = \bar{u}^{\mathrm{T}} \left(b - \frac{u_0^{\mathrm{T}} b}{u_0^{\mathrm{T}} a^n} a^n \right) = \bar{u}^{\mathrm{T}} \tilde{b} < 0,$$

deci $\tilde{u}$ este soluţie pentru (1.4).

Observaţia 1.1.1 *Folosind un raţionament asemănător se demonstrează că, dintre sistemele*

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} u \leq 0 \\ b^{\mathrm{T}} u > 0 \end{cases},$$

unul şi numai unul este compatibil.

Teorema 1.1.1 *Dintre sistemele de inecuaţii liniare*

$$\begin{cases} A_{11} x^1 + A_{12} x^2 + A_{13} x^3 \geq b^1 \\ A_{21} x^1 + A_{22} x^2 + A_{23} x^3 = b^2 \\ A_{31} x^1 + A_{32} x^2 + A_{33} x^3 \leq b^3 \\ x^1 \geq 0, x^2 \ \textit{arbitrar}, x^3 \leq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

şi

$$\begin{cases} -A_{11}^{\mathrm{T}} u^1 - A_{21}^{\mathrm{T}} u^2 - A_{31}^{\mathrm{T}} u^3 \geq 0 \\ -A_{12}^{\mathrm{T}} u^1 - A_{22}^{\mathrm{T}} u^2 - A_{32}^{\mathrm{T}} u^3 = 0 \\ -A_{13}^{\mathrm{T}} u^1 - A_{23}^{\mathrm{T}} u^2 - A_{33}^{\mathrm{T}} u^3 \leq 0 \\ u^1 \geq 0, u^2 \ \textit{arbitrar}, u^3 \leq 0 \\ (b^1)^{\mathrm{T}} u^1 + (b^2)^{\mathrm{T}} u^2 + (b^3)^{\mathrm{T}} u^3 > 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

unul şi numai unul are soluţie.

Demonstraţie. Prelucrăm sistemul (1.10) pentru a putea folosi Lema 1.1.2.

Folosim substituţiile

$$x^2 = x^4 - x^5,\ \ x^3 = -x^6,\ \ x^7 = A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 - b^1,\ \ x^8 = b^3 - A_{31}x^1 - A_{32}x^2 - A_{33}x^3$$

cu $x^4, x^5, x^6, x^7, x^8 \geq 0$.

Sistemul (1.10) devine

$$\begin{cases} A_{11}x^1 + A_{12}x^4 - A_{12}x^5 - A_{13}x^6 - x^7 & = b^1 \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^4 - A_{22}x^5 - A_{23}x^6 & = b^2 \\ A_{31}x^1 + A_{32}x^4 - A_{32}x^5 - A_{33}x^6 + x^8 & = b^3 \\ x^j \geq 0, j \in \{1,4,5,6,7,8\} \end{cases}. \tag{1.12}$$

Aplicând Observaţia 1.1.1 deducem că sistemul (1.12) este compatibil dacă şi numai dacă sistemul

$$\begin{cases} A_{11}^{\mathrm{T}}u^1 + A_{21}^{\mathrm{T}}u^2 + A_{31}^{\mathrm{T}}u^3 \leq 0 \\ A_{12}^{\mathrm{T}}u^1 + A_{22}^{\mathrm{T}}u^2 + A_{32}^{\mathrm{T}}u^3 \leq 0 \\ -A_{12}^{\mathrm{T}}u^1 - A_{22}^{\mathrm{T}}u^2 - A_{32}^{\mathrm{T}}u^3 \leq 0 \\ -A_{13}^{\mathrm{T}}u^1 - A_{23}^{\mathrm{T}}u^2 - A_{33}^{\mathrm{T}}u^3 \leq 0 \\ -u^1 \leq 0 \\ u^3 \leq 0 \\ (b^1)^{\mathrm{T}}u^1 + (b^2)^{\mathrm{T}}u^2 + (b^3)^{\mathrm{T}}u^3 > 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

este incompatibil şi reciproc.

Evident sistemul (1.13) este echivalent cu sistemul (1.11). ■

Teorema 1.1.2 *Dacă $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice antisimetrică ($D^{\mathrm{T}} = -D$), atunci există $\bar{x} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ soluţie pentru sistemul*

$$\begin{cases} Dx \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

astfel încât

$$D\bar{x} + \bar{x} > 0. \tag{1.15}$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 1.1.1 sistemul asociat sistemului

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

este

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}u \leq 0 \\ b^{\mathrm{T}}u > 0 \\ u \geq 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Punem $A = D$ şi $b = e^i = (\delta_{ji})_{j=\overline{1,n}}$, $i \in \overline{1,n}$ (δ_{ji} fiind simbolul lui Kronecker). Distingem două situaţii:

a) sistemul (1.16) este compatibil şi implicit sistemul (1.17) este incompatibil.

Fie $x^i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ astfel încât $Dx^i \geq e^i$ şi $x^i \geq 0$. Cum $e^i \geq 0$, deducem că x^i este soluţie pentru (1.14).

Linia i din relaţia (1.15) se mai scrie

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^i + x_i^i \geq e_i^i + x_i^i = 1 + x_i^i > 0. \tag{1.18}$$

b) sistemul (1.17) este compatibil şi implicit sistemul (1.16) este incompatibil.

Fie $x^i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ astfel încât $-Dx^i \leq 0 \Leftrightarrow Dx^i \geq 0$, $x^i \geq 0$ şi $(e^i)^{\mathrm{T}}x^i > 0 \Leftrightarrow x_i^i > 0$. Deducem că x^i este soluţie pentru (1.14) şi

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^i + x_i^i > 0. \tag{1.19}$$

Considerăm acum $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \geq 0$. Obţinem $D\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} Dx^i \geq 0$ şi, pentru componenta i a relaţiei (1.15):

$$(D\bar{x} + \bar{x})_i = \left(\sum_{k=1}^{n}(Dx^k + x^k)\right)_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^k + x_i^k\right) \geq \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^i + x_i^i > 0.$$

Prin urmare este verificată şi relaţia (1.15). ■

Lema 1.1.3 *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}_+^\star$ *şi* $y_1, y_2, \ldots, y_r \in \mathbb{R}$, *nu toate nule. Atunci există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$x_i - \lambda y_i > 0, \quad \forall \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad 1 \leq i \leq r$$

şi există $i_0 \in \overline{1, r}$ *astfel încât* $x_{i_0} - \varepsilon y_{i_0} = 0$ *sau* $x_{i_0} + \varepsilon y_{i_0} = 0$.

Demonstraţie. Fie $I_+ = \{i \in \overline{1, r} \,|\, y_i > 0\}$ şi $I_- = \{i \in \overline{1, r} \,|\, y_i < 0\}$. Conform ipotezei $I_+ \neq \emptyset$ sau $I_- \neq \emptyset$.
a) Dacă $I_+ \neq \emptyset$ şi $I_- \neq \emptyset$, fie $p \in I_+$ şi $q \in I_-$ astfel încât

$$0 < \alpha = \frac{x_p}{y_p} \leq \frac{x_i}{y_i}, \quad \forall i \in I_+, \quad 0 > \beta = \frac{x_q}{y_q} \geq \frac{x_j}{y_j}, \quad \forall j \in I_-.$$

Fie $\varepsilon = \min\{\alpha, -\beta\}$.
Dacă $\varepsilon = \alpha$, considerăm $i_0 = p$ şi avem $x_{i_0} - \varepsilon y_{i_0} = 0$.
Dacă $\varepsilon = -\beta$, considerăm $i_0 = q$ şi avem $x_{i_0} + \varepsilon y_{i_0} = 0$.
b) Dacă $I_+ \neq \emptyset$ şi $I_- = \emptyset$, considerăm $\beta = -\infty$.
c) Dacă $I_+ = \emptyset$ şi $I_- \neq \emptyset$, considerăm $\alpha = \infty$. ■

1.2 Noţiuni fundamentale

Definiţia 1.2.1 Forma standard *a problemei de programare liniară este*

$$PL - \min : \begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}), \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Funcţia $c^{\mathrm{T}}x$ *se numeşte* funcţie obiectiv, *ecuaţiile* $Ax = b$ *se numesc* restricţii, *iar inegalităţile* $x \geq 0$ *se numesc* condiţii de nenegativitate.

Elementele mulţimii

$$P = \{x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \,|\, Ax = b, \; x \geq 0\}$$

se numesc soluţii admisibile *sau* programe.

Un element $x^o \in P$ *se numeşte* soluţie optimă *sau* program optim *pentru* $PL - \min$ *dacă*

$$c^{\mathrm{T}}x^o \leq c^{\mathrm{T}}x, \quad \forall x \in P.$$

Un element $x \in P$ *se numeşte* program de bază *sau* soluţie admisibilă de bază *dacă vectorii coloană* a^j, *corespunzători elementelor* $x_j \neq 0$, *sunt liniari independenţi.*

Un program de bază se numeşte nedegenerat *dacă are* m *componente nenule şi* degenerat *în caz contrar.*

Observaţia 1.2.1 *Se poate considera că rangul sistemului $Ax = b$ este m (se poate renunţa la ecuaţiile secundare), deci $m \leq n$.*

Observaţia 1.2.2 *Numărul programelor de bază este finit, cel mult C_n^m.*

Observaţia 1.2.3 *Dacă $0 \in P$, atunci 0 va fi considerat program de bază.*

Propoziţia 1.2.1 *Dacă o problemă de programare liniară are soluţii admisibile ($P \neq \emptyset$), atunci are cel puţin o soluţie admisibilă de bază.*

Demonstraţie. Dacă $0 \in P$, atunci, conform Observaţiei 1.2.3, afirmaţia este verificată.

Dacă $0 \notin P$, fie $x \in P$ un program cu număr minim de componente nenule. Folosind, eventual, o renumerotare a componentelor, putem scrie $x = (x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_r \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0)^{\mathrm{T}}$.

Distingem două situaţii:
a) Dacă $a^1, a^2, \ldots, a^r$ sunt liniar independenţi, atunci x este soluţie admisibilă de bază.
b) Dacă $a^1, a^2, \ldots, a^r$ sunt liniar dependenţi, atunci există $y_1, y_2, \ldots, y_r \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$y_1 a^1 + y_2 a^2 + \cdots + y_r a^r = 0. \tag{1.21}$$

Fie $y = (y_1 \;\; y_2 \;\; \ldots \;\; y_r \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Atunci $Ay = 0$ şi

$$A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay = Ax = b, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conform Lemei 1.1.3 există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$x + \lambda y \geq 0, \quad \forall \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] \tag{1.22}$$

şi există $\lambda' \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ astfel încât vectorul $x + \lambda' y$ are cel mult $r - 1$ componente nenule. Contradicţie cu alegerea lui x. Prin urmare singura situaţie posibilă este cea de la punctul a), adică x este soluţie de bază. ∎

Propoziţia 1.2.2 *Dacă o problemă de programare liniară admite soluţie optimă, atunci admite şi soluţie optimă de bază.*

Demonstraţie. Fie x o soluţie optimă pentru $PL - \min$, cu număr minim de componente nenule şi r numărul acestora. Dacă $r = 0$ atunci $x = 0$, şi, conform Observaţiei 1.2.3, x este soluţie de bază.

Considerăm $r > 0$. Presupunem că x nu este soluţie admisibilă de bază. Există $y = (y_1 \;\; y_2 \;\; \ldots \;\; y_r \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $y \neq 0$ astfel încât $Ay = 0$. Conform Lemei 1.1.3 există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$x + \lambda y \geq 0, \quad \forall \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Dacă am avea $c^{\mathrm{T}} y \neq 0$ atunci, pentru $\lambda_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ales astfel încît $\lambda_0 c^{\mathrm{T}} y < 0$ am obţine

$$c^{\mathrm{T}} x \leq c^{\mathrm{T}}(x + \lambda_0 y) = c^{\mathrm{T}} x + \lambda_0 c^{\mathrm{T}} y < c^{\mathrm{T}} x.$$

Imposibil! Prin urmare $c^{\mathrm{T}} y = 0$. Alegem $\lambda' \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ astfel încât vectorul $x' = x + \lambda' y$ să aibă cel mult $r - 1$ componente nenule. Avem

$$c^{\mathrm{T}} x' = c^{\mathrm{T}}(x + \lambda' y) = c^{\mathrm{T}} x + \lambda' c^{\mathrm{T}} y = c^{\mathrm{T}} x,$$

deci x' este soluţie optimă şi are cel mult $r - 1$ componente nenule. Contradicţie cu alegerea lui x! Presupunerea făcută este falsă, deci x este soluţie admisibilă de bază. ∎

Observaţia 1.2.4 *Ţinând cont de Propoziţiile 1.2.1 şi 1.2.2 deducem că este suficient să căutăm soluţiile optime printre soluţiile admisibile de bază.*

1.3 Algoritmul SIMPLEX

Algoritmul SIMPLEX a fost propus de G. B. Dantzig (1947). El propune determinarea soluţiei optime prin explorarea sistematică a soluţiilor admisibile de bază ale problemei de programare în forma standard prin trecerea de la un program de bază la altul astfel încât valoarea funcţiei obiectiv să fie ”cel puţin la fel de bună”.

Algorimul identifică şi cazurile în care problema de programare liniară nu are soluţii admisibile de bază sau are optim infinit.

Pentru a putea aplica Algoritmul SIMPLEX Primal este necesară identificarea unei soluţii primal admisibile. Determinarea acesteia se poate face folosind tot Algoritmul SIMPLEX Primal, dar pentru o altă problemă (problema asociată) formulată pornind de la problema iniţială.

1.3.1 Algoritmul SIMPLEX Primal

Considerăm problema de programare în forma standard

$$PL - \min : \begin{cases} \min \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{1.23}$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, cu rang $A = m$.

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}),\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Fie $x^0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ o soluţie admisibilă de bază şi $\mathcal{B}_0 = \{i_1^0, i_2^0, \ldots, i_m^0\}$ ($i_k \in \overline{1,n}, k \in \overline{1,m}$) mulţimea indicilor corespunzători vectorilor coloană din matricea A care formează baza asociată soluţiei x^0, $\left\{\mathfrak{a}_{i_1^0}, \mathfrak{a}_{i_2^0}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_i^0}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_m^0}\right\}$, unde $\mathfrak{a}_j$, $j \in \overline{1,n}$, este vectorul din spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^m/\mathbb{R}$ care are reprezentarea a^j în baza canonică.

Notăm $\mathcal{S}_0 = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}_0$. Atunci $x_j^0 \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{B}_0$ şi $x_j^0 = 0$, $\forall j \in \mathcal{S}_0$.

Algoritmul SIMPLEX Primal se derulează iterativ pe baza tabelului următor:

	z_{00}^p	Δ_1^p	Δ_2^p	$\ldots$	Δ_j^p	$\ldots$	Δ_n^p
i_1^p	x_1^p	z_{11}^p	z_{12}^p	$\ldots$	z_{1j}^p	$\ldots$	z_{1n}^p
i_2^p	x_2^p	z_{21}^p	z_{22}^p	$\ldots$	z_{2j}^p	$\ldots$	z_{2n}^p
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i_i^p	x_i^p	z_{i1}^p	z_{i2}^p	$\ldots$	z_{ij}^p	$\ldots$	z_{in}^p
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i_m^p	x_m^p	z_{m1}^p	z_{m2}^p	$\ldots$	z_{mj}^p	$\ldots$	z_{mn}^p

unde $p \in \mathbb{N}$ este pasul curent, $i_k^p \in \overline{1,n}$, ($k \in \overline{1,m}$), este indicele coloanei corespunzătoare vectorului de pe poziţia k din baza curentă $\{\mathfrak{a}_{i_1^p}, \mathfrak{a}_{i_2^p}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_i^p}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_m^p}\}$.

$$z_{00}^p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^p = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k^p} x_k^p = \sum_{j\in\mathcal{B}_p} c_j x_j^p$$

este valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia curentă (la primul pas pentru soluţia admisibilă de bază x^0),

$$z_{ij}^p, \quad i \in \overline{1,m},$$

sunt coordonatele vectorului $\mathfrak{a}_j$ în baza curentă, $j \in \overline{1,n}$ (la primul pas

$$z_{ij}^0 = a_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

este matricea sistemului restricţiilor problemei de programare liniară),

$$\Delta_j^p = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k^p} z_{kj}^p - c_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Observaţia 1.3.1 *Dacă $j = i_k^p \in \mathcal{B}_p$, atunci $z_{ij}^p = \delta_{ik}$, $i = \overline{1,m}$.*
Dacă $j \in \mathcal{B}_p$, atunci $\Delta_j^p = 0$.
Calculul pentru elementele din tabel se face numai la primul pas. Pentru paşii următori elementele se calculează folosind regula din lema substituţiei.

1.3.2 Analiza tabelului SIMPLEX Primal

După întocmirea unui tablel SIMPLEX, pentru trecerea la următorul tabel sau pentru finalizare se face o analiză. În urma analizei se identifică una din următoarele trei situaţii:

1. **S-a obţinut soluţie optimă.** Dacă $\Delta_j^p \leq 0$, $\forall j \in \overline{1,n}$.
2. **Problema are optim infinit.** Dacă există $j \in \overline{1,n}$ astfel încât $\Delta_j^p > 0$ şi $z_{ij}^p \leq 0$, $\forall i \in \overline{1,m}$.
3. **Algoritmul continuă.** Dacă există $j \in \overline{1,n}$ astfel încât $\Delta_j^p > 0$ şi pentru orice $j \in \overline{1,n}$ pentru care $\Delta_j^p > 0$ există cel puţin un element $z_{ij}^p > 0$, $i \in \overline{1,m}$.

În situaţia de la punctul 3 se continuă cu identificarea vectorului care va "intra" în noua bază şi a vectorului care va "ieşi" din baza curentă.

În funcţie de situaţie sau de posibilităţile de calcul se stabilesc criteriile de "intrare" şi de "ieşire" din bază.

Observaţia 1.3.2 *Algoritmul are ca scop identificarea bazei pentru care se obţine soluţia optimă. De fapt se construiesc, succesiv, baze şi soluţii admisibile de bază în aşa fel încât la fiecare pas să se îmbunătăţească valoarea funcţiei obiectiv. Ţinând cont că numărul bazelor este finit, deducem că algoritmul se opreşte după un număr finit de paşi.*

Cel mai simplu criteriu de "intrare" în bază este:
"Intră în noua bază vectorul coloană pentru care Δ_j este cel mai mare".
Fie $j' \in \overline{1,n}$ astfel încât $\Delta_{j'}^p = \max\limits_{1\leq j\leq n} \Delta_j^p$. Evident, dacă ne încadrăm în situaţia 3, avem $\Delta_{j'}^p > 0$ şi există $i \in \overline{1,m}$ astfel încât $z_{ij'} > 0$.
Fie $i' \in \overline{1,m}$ astfel încât

$$\frac{x_{i'}^p}{z_{i'j'}^p} = \min \left\{ \frac{x_i^p}{z_{ij'}^p} \;\middle|\; z_{ij'}^p > 0, \; i \in \overline{1,m} \right\}.$$

Cu aceste notaţii poziţia pivotului este (i', j'), $\mathcal{B}_{p+1} = \mathcal{B}_p \setminus \{i_{i'}^p\} \cup \{j'\}$ (altfel spus, $i_{i'}^{p+1} = j'$) şi $\mathcal{S}_{p+1} = \mathcal{S}_p \setminus \{j'\} \cup \{i_{i'}\}$.
Prin urmare, "iese" din bază vectorul $\mathfrak{a}_{i_{i'}}$ şi "intră" în noua bază vectorul $\mathfrak{a}_{j'}$.

Propoziţia 1.3.1 *a) Fie $\mathcal{B}_p = \{i_1^p, i_2^p, \ldots, i_m^p\}$ mulţimea indicilor corespunzători vectorilor coloană din matricea A care formează baza asociată soluţiei x^p (de la pasul p al algoritmului SIMPLEX Primal) şi $\mathcal{S}_p = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}_p$. Dacă există $j \in \mathcal{S}_p$ astfel încât $\Delta_j^p > 0$ şi pentru orice $j \in \mathcal{S}_p$ pentru care $\Delta_j^p > 0$ există cel puţin un indice $i_j \in \overline{1,m}$ astfel încât $z_{i_j j}^p > 0$, atunci pentru $j' \in \mathcal{S}_p$ şi $i' \in \overline{1,m}$ aleşi astfel încât*

$$\Delta_{j'}^p = \max_{1\leq j\leq n} \Delta_j^p$$

şi

$$\frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} = \min\left\{ \frac{x^p_i}{z^p_{ij'}} \;\middle|\; z^p_{ij'} > 0,\ i \in \overline{1,m} \right\}$$

soluţia asociată bazei corespunzătoare mulţimii de indicii $\mathcal{B}_{p+1} = \mathcal{B}_p \setminus \{i^p_{i'}\} \cup \{j'\}$ *este tot soluţie admisibilă de bază şi* $z^{p+1}_{00} \le z^p_{00}$.

b) Pentru prelucrarea interiorului tabelului SIMPLEX Primal se poate folosi algoritmul din lema substituţiei:

– linia pivotului (linia i'*) se împarte la pivot*

– coloana pivotului se completează cu 0

– celelalte elemente din interiorul tabelului (inclusiv prima linie şi prima coloană) se calculează cu "regula dreptunghiului".

Pentru pasul $p+1$ *elementele din tabelul SIMPLEX Primal se obţin folosind relaţiile:*

$$\Delta^{p+1}_{j'} = 0, \quad z^{p+1}_{ij'} = 0,\ \forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \setminus \{i'\}, \quad z^{p+1}_{i'j'} = 1$$

$$x^{p+1}_{i'} = \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}}, \quad z^{p+1}_{i'j} = \frac{z^p_{i'j}}{z^p_{i'j'}},\ \forall j \in \overline{1,n}$$

$$x^{p+1}_i = x^p_i - \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} z^p_{ij'},\ \ \forall i \in \overline{1,m},\ i \ne i', \quad z^{p+1}_{00} = z^p_{00} - \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} \Delta^p_{j'}$$

$$z^{p+1}_{ij} = z^p_{ij} - \frac{z^p_{i'j}}{z^p_{i'j'}} z^p_{ij'},\ \ \forall i \in \overline{1,m},\ i \ne i',\ \forall j \in \overline{1,n}, j \ne j'$$

$$\Delta^{p+1}_j = \Delta^p_j - \frac{z^p_{i'j}}{z^p_{i'j'}} \Delta^p_{j'},\ \ \forall j \in \overline{1,n},\ j \ne j'.$$

Demonstraţie. Mai întâi să verificăm că, prin trecerea de la baza corespunzătoare mulţimii de indici $\mathcal{B}_p$ la baza definită de mulţimea de indici $\mathcal{B}_{p+1}$, cu pivotul ales în poziţia (i', j'), soluţia obţinută este tot soluţie admisibilă de bază.

Conform lemei substituţiei avem:

$$x^{p+1}_{i'} = \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}}, \ \ x^{p+1}_i = x^p_i - \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} z^p_{ij'},\ \ \forall i \in \overline{1,m},\ i \ne i'.$$

Ţinând cont de faptul că $x^p \ge 0$ este soluţie admisibilă de bază, în particular $x^p_{i'} \ge 0$, şi $z^p_{i'j'} > 0$ deducem că $x^{p+1}_{i'} \ge 0$.

Pentru $i \ne i'$, $i \in \overline{1,m}$ distingem trei cazuri:

— $z^p_{ij'} > 0$. Ţinând cont de criteriul de alegere a pivotului, putem scrie

$$x^{p+1}_i = x^p_i - \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} z^p_{ij'} \ge x^p_i - \frac{x^p_i}{z^p_{ij'}} z^p_{ij'} = 0.$$

— $z^p_{ij'} = 0$. Urmează

$$x^{p+1}_i = x^p_i - \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} z^p_{ij'} = x^p_i \ge 0.$$

— $z^p_{ij'} < 0$. Atunci

$$x^{p+1}_i = x^p_i - \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} z^p_{ij'} > x^p_i \ge 0.$$

Pentru valoarea funcţiei obiectiv corespunzătoare soluţiei de la pasul $p+1$ avem

$$z^{p+1}_{00} = z^p_{00} - \frac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} \Delta^p_{j'} \le z^p_{00}$$

deoarece $\dfrac{x^p_{i'}}{z^p_{i'j'}} \ge 0$, iar $\Delta^p_{j'} > 0$. ∎

1.4 Problema asociată

Considerăm problema de programare liniară în forma standard din relaţia (1.23). Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că termenii liberi sunt nenegativi, adică $b \geq 0$. (Dacă există $i \in \overline{1,m}$ astfel încât $b_i < 0$, atunci ecuaţia i se înmulţeşte cu -1.)

Pentru detereminarea unei soluţii admisibile de bază se recurge la o problemă de programare liniară asociată care se obţine din problema iniţială (1.23) prin înlocuirea funcţiei obiectiv şi adăugarea unor necunoscute asociate. Astfel, la restricţia i, se adună, în membrul stâng, necunoscuta asociată x_i^a.

Funcţia obiectiv va fi suma necunoscutelor asociate.

Se obţine astfel problema de programare liniară asociată:

$$PL^a - \min : \begin{cases} \min \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^a \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^a = b_i, \quad i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}, \ x_k^a \geq 0, \ k = \overline{1,m} \end{cases} \tag{1.24}$$

Propoziţia 1.4.1 *Problema de programare liniară (1.23) are soluţie admisibilă de bază dacă şi numai dacă problema de programare liniară asociată (1.24) are soluţie optimă şi valoarea funcţiei obiectiv este egală cu zero.*

Chapter 2

Degenerare şi ciclare

Considerăm problema de programare liniară în forma standard

$$PL - \min : \begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

cu $\operatorname{rang} A = m < n$.

Dacă la fiecare iteraţie a algoritmului SIMPLEX valoarea funcţiei obiectiv scade (strict), atunci, după un număr finit de paşi se ajunge la un program optim (deoarece numărul bazelor este finit).

Dacă valoarea funcţiei obiectiv nu se modifică pentru câteva iteraţii consecutive există posibilitatea ca să se genereze o bază deja folosită. Dacă se continuă algoritmul, se va genera aceeaşi secvenţă de baze, fară a se modifica valoarea funcţiei obiectiv, deci fără a putea rezolva problema. Spunem că algoritmul **ciclează**.

Variaţia valorii funcţiei obiectiv este

$$\frac{\Delta_{j'}^{p} x_{i'}^{p}}{z_{i'j'}^{p}}$$

unde j' este indicele vectorului coloană care intră în bază, iar i' este indicele vectorului coloană care iese din bază.

Această valoare se poate anula dacă $x_{i'}^{p} = 0$, adică dacă baza corespunde unui program degenerat.

Definiţia 2.0.1 *O problemă de programare liniară care are cel puţin un program de bază degenerat se numeşte* **degenerată**.

Dacă nu admite programe de bază degenerate se numeşte **nedegenerată**.

Observaţia 2.0.1 *Degenerarea nu implică neapărat ciclarea.*

Pentru evitarea ciclării se poate folosi ”perturbarea” problemei iniţiale cu scopul eliminării degenerării programelor de bază. Astfel, vectorul b este înlocuit cu

$$b(\varepsilon) = b + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{j} a^{j},$$

unde $\varepsilon > 0$.

Obţinem *problema perturbată*:

$$PL_{\varepsilon} - \min : \begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x \\ Ax = b(\varepsilon) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Propoziţia 2.0.2 *Dacă baza corespunzătoare mulţimii de indici* $\mathcal{B}_0 = \{i_1^0, i_2^0, \ldots, i_m^0\}$ *este o bază primal admisibilă pentru problema iniţială, atunci există* $\varepsilon_0 > 0$ *astfel încât programul de bază*

$$x^0(\varepsilon) = B_0^{-1} b(\varepsilon)$$

al problemei perturbate corspunzător bazei definite de mulţimea de indici $\mathcal{B}_0$ *este nedegenerat pentru orice* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Cu* B_0 *s-a notat matricea formată din coloanele* $a^{i_1^0}, a^{i_2^0}, \ldots, a^{i_m^0}$ *ale matricii* A.

Demonstraţie. Notăm $x^0 = B_0^{-1} b$ programul de bază corespunzător mulţimii de indici $\mathcal{B}_0$. Avem

$$x_i^0(\varepsilon) = x_i^0 + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} z_{ij}^0 \varepsilon^j, \quad \forall i = \overline{1, m}$$

cu $x_i^0 \geq 0$, $\varepsilon^i > 0$ şi

$$\sum_{j=m+1}^{n} z_{ij}^0 \varepsilon^j = \varepsilon^{m+1} \sum_{j=m+1}^{n} z_{ij}^0 \varepsilon^{j-m-1}.$$

Deci $\exists \varepsilon_i > 0$ astfel încât $x_i^0(\varepsilon) > 0$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_i)$.

Pentru $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m\}$ obţinem rezultatul căutat. ∎

Propoziţia 2.0.3 *Fie* $\mathcal{B}_p$ *şi* $\mathcal{S}_p$ *mulţimile de indici corespunzătoare pasului* p *şi* $j' \in \mathcal{S}_p$ *astfel încât*

$$\mathfrak{B}^+ = \{i \in \overline{1, m} \mid z_{ij'}^p > 0\} \neq \emptyset.$$

Dacă $\exists \varepsilon_{[p]} > 0$ *astfel încât* $x^p(\varepsilon)$ *este program nedegenerat al problemei perturbate* $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_{[p]})$, *atunci* $\exists \varepsilon' > 0$ *astfel încât, pentru orice* $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$, *indicele* $i' \in \mathfrak{B}^+$ *al vectorului coloană determinat conform criteriului de ieşire din bază*

$$\frac{x_{i'}^p(\varepsilon)}{z_{i'j'}^p} = \min_{i \in \mathfrak{B}^+} \left\{ \frac{x_i^p(\varepsilon)}{z_{ij'}^p} \right\}.$$

este unic.

Demonstraţie. Indicele $i' \in \mathfrak{B}^+$ poate fi determinat în mod unic dacă şi numai dacă

$$\frac{x_i^p(\varepsilon)}{z_{ij'}^p} \neq \frac{x_k^p(\varepsilon)}{z_{kj'}^p}, \quad \forall i, k \in \mathfrak{B}^+, \ i \neq k.$$

Relaţia precedentă devine

$$\frac{x_i^p}{z_{ij'}^p} - \frac{x_k^p}{z_{kj'}^p} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \left(\frac{z_{ij}^p}{z_{ij'}^p} - \frac{z_{kj}^p}{z_{kj'}^p} \right) \neq 0. \tag{2.1}$$

Dacă

$$\frac{x_i^p}{z_{ij'}^p} \neq \frac{x_k^p}{z_{kj'}^p},$$

atunci $\exists \varepsilon \in (0, \varepsilon_{[p]})$ astfel încât relaţia (2.1) să fie verificată.

Dacă

$$\frac{x_i^p}{z_{ij'}^p} = \frac{x_k^p}{z_{kj'}^p}$$

şi $\exists j" \in \overline{1, n}$ astfel încât

$$\frac{z_{ij}^p}{z_{ij'}^p} = \frac{z_{kj}^p}{z_{kj'}^p}, \quad j \in \overline{1, j" - 1}$$

şi

$$\frac{z_{ij"}^p}{z_{ij'}^p} \neq \frac{z_{kj"}^p}{z_{kj'}^p},$$

atunci relaţia (2.1) se scrie

$$\sum_{j=j"}^{n} \varepsilon^{j-j"} \left(\frac{z_{ij}^p}{z_{ij'}^p} - \frac{z_{kj}^p}{z_{kj'}^p} \right) \neq 0. \tag{2.2}$$

Ţinând cont de alegerea lui $j"$ deducem că $\exists \varepsilon \in (0, \varepsilon_{[p]})$ astfel încât să fie verificată relaţia (2.2).

Observăm că existenţa lui $j"$ este asigurată. Mai mult, $j" \in \overline{1,m}$. Dacă am avea

$$\frac{z_{ij}^p}{z_{ij'}^p} = \frac{z_{kj}^p}{z_{kj'}^p}, \quad \forall j \in \overline{1,m},$$

atunci matricea $B_p^{-1}B_0$ ar avea liniile i şi k proporţionale, unde B_p este matricea formată din coloanele corespunzătoare vectorilor din bază: $\{\mathfrak{a}_{i_1^p}, \mathfrak{a}_{i_2^p}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_i^p}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_m^p}\}$. Contradicţie cu alegerea $m = \operatorname{rang} A$.

Prin urmare, pentru orice $i, k \in \mathfrak{B}^+$ există $\varepsilon_{ik} \in (0, \varepsilon_{[p]})$ astfel încât relaţia (2.1) să fie verificată $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_{ik})$.

Este suficient să alegem $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_{ik} \,|\, i, k \in \mathfrak{B}^+\}$ pentru a încheia demonstraţia. ■

Pentru determinarea indicelui $i' \in \mathfrak{B}^+$, unic, se consideră mulţimea

$$\mathfrak{B}_0 = \left\{ i \in \mathfrak{B}^+ \;\middle|\; \min_{k \in \mathfrak{B}^+} \left\{ \frac{x_k^p}{z_{kj'}^p} \right\} = \frac{x_i^p}{z_{ij'}^p} \right\}.$$

Dacă mulţimea $\mathfrak{B}_0$ este formată dintr-un singur element, atunci acela este indicele i' căutat.

Dacă mulţimea $\mathfrak{B}_0$ are cel puţin două elemente, se construiesc succesiv mulţimile

$$\mathfrak{B}_q = \left\{ i \in \mathfrak{B}_{q-1} \;\middle|\; \min_{k \in \mathfrak{B}_{q-1}} \left\{ \frac{z_{ki_q}^p}{z_{kj'}^p} \right\} = \frac{z_{ii_q}^p}{z_{ij'}^p} \right\}$$

până se obţine o mulţime cu un singur element, indicele i' căutat.

Dacă $x^p(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{[p]})$, este soluţie optimă a problemei perturbate, atunci soluţia problemei iniţiale corespunzătoare aceleiaşi baze este optimă.

Dacă, la pasul p, există $j \in \mathcal{S}_p$ astfel încât $\Delta_j > 0$ şi $z_{ij} \leq 0, \forall i \in \overline{1,m}$, atunci problema perturbată are optim infinit pentru orice $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{[p]})$, deci şi problema iniţială are optim infinit.

Algoritmul de calcul folosit pentru evitarea ciclării presupune înlocuirea criteriului de determinare a vectorului coloană care iese din bază: *se construiesc mulţimile de indici*

$$\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots,$$

până se obţine una formată dintr-un singur element, care este indicele coloanei care iese din bază.

Chapter 3

Algoritmul SIMPLEX Dual

3.1 Problema duală

Considerăm problema de programare liniară de minim în forma generală

$$\begin{cases} \min\left((c^1)^{\mathrm{T}}x^1 + (c^2)^{\mathrm{T}}x^2 + (c^3)^{\mathrm{T}}x^3\right) \\ A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 \geq b^1 \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 = b^2 \\ A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3 \leq b^3 \\ x^1 \geq 0, x^2 \text{ arbitrar}, x^3 \leq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Definiţia 3.1.1 *Numim* **problemă duală** *asociată problemei (3.1), numită* **problemă primală**, *următoarea problemă de programare liniară*

$$\begin{cases} \max\left((b^1)^{\mathrm{T}}u^1 + (b^2)^{\mathrm{T}}u^2 + (b^3)^{\mathrm{T}}u^3\right) \\ A_{11}^{\mathrm{T}}u^1 + A_{21}^{\mathrm{T}}u^2 + A_{31}^{\mathrm{T}}u^3 \leq c^1 \\ A_{12}^{\mathrm{T}}u^1 + A_{22}^{\mathrm{T}}u^2 + A_{32}^{\mathrm{T}}u^3 = c^2 \\ A_{13}^{\mathrm{T}}u^1 + A_{23}^{\mathrm{T}}u^2 + A_{33}^{\mathrm{T}}u^3 \geq c^3 \\ u^1 \geq 0, u^2 \ \textit{arbitrar}, u^3 \leq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Observaţia 3.1.1 *Duala problemei duale este problema primală.*

Definiţia 3.1.2 *Perechea de probleme de programare liniară (3.1) şi (3.2) se numeşte* **cuplu de probleme duale**.

Definiţia 3.1.3 *O restricţie a unei probleme de programare se numeşte* **concordantă** *dacă este o inecuaţie de tipul "$\geq$" într-o problemă de programare liniară* $PL - \min$ *sau de tipul "$\leq$" într-o problemă de programare liniară* $PL - \max$.

O restricţie a unei probleme de programare se numeşte **neconcordantă** *dacă este o inecuaţie de tipul "$\leq$" într-o problemă de programare liniară* $PL - \min$ *sau de tipul "$\geq$" într-o problemă de programare liniară* $PL - \max$.

Pentru obţinerea problemei duale pentru o problemă de programare liniară se fac următoarele transformări:

1. dacă problema primală este $PL - \min$, atunci problema duală este $PL - \max$ şi invers;
2. termenii liberi ai restricţiilor din problema primală devin coeficienţii funcţiei obiectiv a problemei duale;
3. coeficienţii funcţiei obiectiv a problemei primale devin termenii liberi ai restricţiilor problemei duale;
4. matricea coeficienţilor restricţiilor problemei duale este transpusa matricii coeficienţilor problemei primale;

5. variabilele duale asociate unor restricţii primale concordante sunt supuse condiţiei de nenegativitate;
6. variabilele duale asociate unor restricţii primale neconcordante sunt supuse condiţiei de nepozitivitate;
7. variabilele duale asociate unor restricţii primale care sunt ecuaţii nu sunt supuse nici unei condiţii privind semnul;
8. restricţiile duale asociate variabilelor primale supuse condiţiei de nenegativitate sunt restricţii concordante;
9. restricţiile duale asociate variabilelor primale supuse condiţiei de nepozitivitate sunt restricţii neconcordante;
10. restricţiile duale supuse variabilelor primale arbitrare sunt ecuaţii.

Observaţia 3.1.2 *Duala problemei de programare în forma standard*

$$\begin{cases} \min c^{\mathrm{T}}x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

este

$$\begin{cases} \max b^{\mathrm{T}}u \\ A^{\mathrm{T}}u \leq c \\ u \text{ arbitrar} \end{cases} \tag{3.4}$$

Observaţia 3.1.3 *Duala problemei de programare în forma canonică*

$$\begin{cases} \min c^{\mathrm{T}}x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

este tot în formă canonică

$$\begin{cases} \max b^{\mathrm{T}}u \\ A^{\mathrm{T}}u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Considerăm în continuare cuplul de probleme duale (3.5)–(3.6). Fie

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, \ \ x \geq 0\}$$

mulţimea programelor problemei primale (3.5) şi

$$D = \left\{u \in \mathbb{R}^m \mid A^{\mathrm{T}}u \leq c, \ \ u \geq 0\right\}$$

mulţimea programelor problemei duale (3.6).

Lema 3.1.1 *Dacă $x \in P$ şi $u \in D$, atunci*

$$c^{\mathrm{T}}x \geq b^{\mathrm{T}}u.$$

Demonstraţie. Avem

$$x \in P \Rightarrow Ax \geq b \quad \text{şi} \quad u \in D \Rightarrow u \geq 0.$$

Deducem

$$u^{\mathrm{T}}Ax \geq u^{\mathrm{T}}b.$$

Analog, din $A^{\mathrm{T}}u \leq c$ şi $x \geq 0$, deducem $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}u \leq x^{\mathrm{T}}c$.
Urmează

$$c^{\mathrm{T}}x = (x^{\mathrm{T}}c)^{\mathrm{T}} \geq (x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}u)^{\mathrm{T}} = u^{\mathrm{T}}Ax \geq u^{\mathrm{T}}b = (u^{\mathrm{T}}b)^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}u. \ \blacksquare$$

Lema 3.1.2 *Dacă $x^\star \in P$ şi $u^\star \in D$ verifică relaţia $c^{\mathrm{T}}x^\star = b^{\mathrm{T}}u^\star$, atunci $x^\star$ este soluţie optimă a problemei primale, iar $u^\star$ este soluţie optimă a problemei duale.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $x^\star$ nu este soluţie optimă a problemei primale. Atunci există $\overline{x} \in P$ astfel încât $c^{\mathrm{T}}\overline{x} < c^{\mathrm{T}}x^\star = b^{\mathrm{T}}u^\star$, ceea ce contrazice afirmaţia Lemei 3.1.1. Rezultă că $x^\star$ este soluţie optimă a problemei primale.

Analog se demonstrază că $u^\star$ este soluţie optimă a problemei duale. ■

Teorema 3.1.1 (Teorema fundamentală a dualităţii) *Pentru cuplul de probleme duale (3.5)–(3.6) una şi numai una din următoarele afirmaţii este adevărată:*

1. *Ambele probleme au programe. În acest caz, ambele probleme au programe optime şi valorile optime ale funcţiilor obiectiv sunt egale.*
2. *Una dintre probleme are programe, iar cealaltă nu are. În acest caz, problema care are programe are optim infinit.*
3. *Nici una dintre probleme nu are programe.*

Demonstraţie. Considerăm matricea

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -A^{\mathrm{T}} & c \\ A & 0 & -b \\ -c^{\mathrm{T}} & b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n+1}(\mathbb{R}),$$

care verifică relaţia $D^{\mathrm{T}} = -D$, adică este antisimetrică. Conform Teoremei 1.1.2, rezultă că sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} Dz \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

are cel puţin o soluţie $\overline{z} \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ pentru care

$$D\overline{z} + \overline{z} > 0.$$

Prin urmare, există $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^m$ şi $\overline{y} \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} -A^{\mathrm{T}}\overline{u} + c\overline{y} \geq 0 \\ A\overline{x} - b\overline{y} \geq 0 \\ -c^{\mathrm{T}}\overline{x} + b^{\mathrm{T}}\overline{u} \geq 0 \\ \overline{x} \geq 0 \\ \overline{u} \geq 0 \\ \overline{y} \geq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

şi

$$\begin{cases} \overline{x} - A^{\mathrm{T}}\overline{u} + c\overline{y} > 0 \\ A\overline{x} + \overline{u} - b\overline{y} > 0 \\ -c^{\mathrm{T}}\overline{x} + b^{\mathrm{T}}\overline{u} + \overline{y} > 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Inegalitatea $\overline{y} \geq 0$ implică două situaţii: $\overline{y} > 0$ şi $\overline{y} = 0$.
Cazul $\overline{y} > 0$. Deoarece $y \neq 0$, putem construi

$$x^\star = \frac{1}{\overline{y}}\overline{x} \geq 0, \quad u^\star = \frac{1}{\overline{y}}\overline{u} \geq 0. \tag{3.9}$$

Ţinând cont de a doua inegalitate din relaţia (3.7), deducem

$$Ax^\star = \frac{1}{\overline{y}}A\overline{x} \geq \frac{1}{\overline{y}}b\overline{y} = b.$$

Deci $x^\star \in P$.

Analog, folosind prima inegalitate din relaţia (3.7), obţinem

$$A^{\mathrm{T}}u^\star = \frac{1}{\overline{y}}A^{\mathrm{T}}\overline{u} \le \frac{1}{\overline{y}}c\overline{y} = c,$$

adică $u^\star \in D$.

Prin urmare $P \neq \emptyset$ şi $D \neq \emptyset$, adică ne încadrăm în prima situaţie din teoremă. Să verificăm că $x^\star$ şi $u^\star$ sunt soluţii optime pentru problema primală, respectiv duală.

Din a treia inegalitate din relaţia (3.7) obţinem

$$c^{\mathrm{T}}x^\star = \frac{1}{\overline{y}}c^{\mathrm{T}}\overline{x} \le \frac{1}{\overline{y}}b^{\mathrm{T}}\overline{u} = b^{\mathrm{T}}u^\star \Rightarrow c^{\mathrm{T}}x^\star \le b^{\mathrm{T}}u^\star.$$

Din Lema 3.1.1 deducem şi inegalitatea inversă $c^{\mathrm{T}}x^\star \ge b^{\mathrm{T}}u^\star$. Prin urmare $c^{\mathrm{T}}x^\star = b^{\mathrm{T}}u^\star$ şi, conform Lemei 3.1.2, $x^\star$ este soluţie optimă pentru problema primală, iar $u^\star$ este soluţie optimă pentru problema duală.

Cazul $\overline{y} = 0$. Să verificăm mai întâi că mulţimile P şi D nu pot fi simultan nevide. Pentru aceasta presupunem prin absurd că $P \neq \emptyset$ şi $D \neq \emptyset$. Fie $x' \in P$ şi $u' \in D$. Atunci, ţinând cont de prima inegalitate din relaţia (3.7) şi de condiţiile de nenegativitate, putem scrie

$$b^{\mathrm{T}}\overline{u} \le (Ax')^{\mathrm{T}}\overline{u} = (x')^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\overline{u}) \le (x')^{\mathrm{T}}(c\overline{y}) = 0. \tag{3.10}$$

Analog, ţinând cont de a doua inegalitate din (3.7) şi de condiţiile de nenegativitate, obţinem

$$c^{\mathrm{T}}\overline{x} \ge (A^{\mathrm{T}}u')^{\mathrm{T}}\overline{x} = (u')^{\mathrm{T}}(A\overline{x}) \ge (u')^{\mathrm{T}}(b\overline{y}) = 0. \tag{3.11}$$

Din relaţiile (3.10) şi (3.11) deducem

$$b^{\mathrm{T}}\overline{u} \le c^{\mathrm{T}}\overline{x},$$

relaţie care contrazice ultima inegalitate din (3.8). Prin urmare mulţimile P şi D nu pot fi simultan nevide.

Distingem trei posibilităţi:

i) $P = \emptyset$ şi $D = \emptyset$. Avem situaţia a treia din teoremă care nu necesită argumentare.

ii) $P \neq \emptyset$ şi $D = \emptyset$. Avem a doua situaţie din teoremă şi trebuie să verificăm că problema primală are optim infinit.

Fie $x' \in P$. Evident, relaţia (3.10) este adevărată şi în acest caz. Ţinând cont şi de ultima inegalitate din (3.8) putem scrie

$$c^{\mathrm{T}}\overline{x} < b^{\mathrm{T}}\overline{u} \le 0 \Rightarrow c^{\mathrm{T}}\overline{x} < 0.$$

Considerăm $\alpha \ge 0$ şi definim vectorul $x(\alpha) = x' + \alpha\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Avem $x(\alpha) \ge 0$ şi

$$Ax(\alpha) = Ax' + \alpha A\overline{x} \ge b + \alpha A\overline{x} \ge b$$

(am folosit şi a doua inegalitate din (3.7)). Deci $x(\alpha) \in P, \forall\alpha \ge 0$. Urmează

$$\lim_{\alpha\to+\infty} c^{\mathrm{T}}x(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}(c^{\mathrm{T}}x' + \alpha c^{\mathrm{T}}\overline{x}) = -\infty,$$

adică problema primală are optim infinit.

iii) $P = \emptyset$ şi $D \neq \emptyset$. Avem a doua situaţie din teoremă. Analog cu *ii)*. ■

Corolarul 3.1.1 (Teorema de dualitate) *Dacă într-un cuplu de probleme duale una dintre probleme are un program optim, atunci şi cealaltă problemă are un program optim, iar valorile optime ale funcţiilor obiectiv sunt egale.*

Teorema 3.1.2 (Teorema tare a ecarturilor complementare) *Dacă problemele duale (3.5)–(3.6) au programe, atunci există un program optim $x^\star$ al problemei primale şi un program optim $u^\star$ al problemei duale astfel încât*

$$(Ax^\star - b) + u^\star > 0 \tag{3.12}$$

şi

$$(c - A^{\mathrm{T}}u^\star) + x^\star > 0. \tag{3.13}$$

Demonstraţie. Conform ipotezei avem $P \neq \emptyset$ şi $D \neq \emptyset$, deci prima situaţie din Teorema fundamentală a dualităţii. Considerăm programele optime $x^\star$ şi $u^\star$ construite ca în relaţia (3.9). Folosind primele două inegalităţi din relaţia (3.8) putem scrie

$$(Ax^\star - b) + u^\star = \frac{1}{\overline{y}}A\overline{x} - b + \frac{1}{\overline{y}}\overline{u} > \frac{1}{\overline{y}}\left(b\overline{y} - \overline{u}\right) - b + \frac{1}{\overline{y}}\overline{u} = b - \frac{1}{\overline{y}}\overline{u} - b + \frac{1}{\overline{y}}\overline{u} = 0$$

şi

$$(c - A^{\mathrm{T}}u^\star) + x^\star = c - \frac{1}{\overline{y}}A^{\mathrm{T}}\overline{u} + \frac{1}{\overline{y}}\overline{x} = \frac{1}{\overline{y}}\left(\overline{x} - A^{\mathrm{T}}\overline{u}\right) + c > \frac{1}{\overline{y}}(-c\overline{y}) + c = 0,$$

adică relaţiile (3.12) şi (3.13) din Teoremă. ■

Teorema 3.1.3 (Teorema slabă a ecarturilor complementare) *Condiţia necesară şi suficientă ca $x^\star \in P$ şi $u^\star \in D$ să fie soluţii optime pentru cele două probleme duale (3.5), respectiv (3.6) este ca*

$$(u^\star)^{\mathrm{T}}\left(Ax^\star - b\right) = 0 \tag{3.14}$$

şi

$$(x^\star)^{\mathrm{T}}\left(c - A^{\mathrm{T}}u^\star\right) = 0. \tag{3.15}$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $x^\star \in P$ şi $u^\star \in D$ programe optime pentru problemele primală respectiv duală. Conform Teoremei fundamentale a dualităţii avem

$$c^{\mathrm{T}}x^\star = b^{\mathrm{T}}u^\star.$$

Atunci

$$(u^\star)^{\mathrm{T}}(Ax^\star - b) + (x^\star)^{\mathrm{T}}(c - A^{\mathrm{T}}u^\star) = (u^\star)^{\mathrm{T}}Ax^\star - (u^\star)^{\mathrm{T}}b + (x^\star)^{\mathrm{T}}c - (x^\star)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}u^\star = 0. \tag{3.16}$$

Avem

$$x^\star \in P \Rightarrow x^\star \geq 0 \text{ şi } Ax^\star \geq b \Leftrightarrow Ax^\star - b \geq 0$$

şi

$$u^\star \in D \Rightarrow u^\star \geq 0 \text{ şi } A^{\mathrm{T}}u^\star \leq c \Leftrightarrow c - A^{\mathrm{T}}u^\star \geq 0.$$

Prin urmare

$$(u^\star)^{\mathrm{T}}\left(Ax^\star - b\right) \geq 0 \text{ şi } (x^\star)^{\mathrm{T}}\left(c - A^{\mathrm{T}}u^\star\right) \geq 0.$$

Ţinând cont şi de relaţia (3.16) deducem egalităţile (3.14) şi (3.15).

Suficienţa. Adunând egalităţile (3.14) şi (3.15) obţinem, după efectuarea calculelor, $c^{\mathrm{T}}x^\star = b^{\mathrm{T}}u^\star$. Aplicând Lema 3.1.2 deducem că $x^\star$ este soluţie optimă a problemei primale, iar $u^\star$ este soluţie optimă a problemei duale. ■

3.2 Algoritmul SIMPLEX Dual

Considerăm problema de programare liniară în forma standard

$$PL - \min \begin{cases} \min c^{\mathrm{T}}x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

cu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x, c \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ şi rang $A = m < n$.

Duala acestei probleme este

$$PL - \max \begin{cases} \max b^{\mathrm{T}}u \\ A^{\mathrm{T}}u \leq c \\ u \ \ arbitrar, \end{cases} \tag{3.18}$$

cu $u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Definiţia 3.2.1 *O bază formată cu m coloane liniar independente ale matricii A se numeşte* **primal admisibilă** *dacă soluţia de bază corespunzătoare $x^0 = B_0^{-1}b$ este program al problemei de programare liniară $PL - \min$, adică dacă $x^0 \geq 0$.*

O bază formată cu m coloane liniar independente ale matricii A se numeşte **dual admisibilă** *dacă*

$$\Delta_j \leq 0, \forall j \in \overline{1,n}. \tag{3.19}$$

Fie

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \tag{3.20}$$

mulţimea programelor problemei primale (soluţiilor primal admisibile) şi

$$D = \left\{u \in \mathbb{R}^m \,|\, A^{\mathrm{T}}u \leq c\right\} \tag{3.21}$$

mulţimea programelor problemei duale (soluţiilor dual admisibile).

Presupunem în continuare că există baze dual admisibile pentru problema primală (3.17), deci $D \neq \emptyset$.

Algoritmul SIMPLEX Primal explorează bazele primal admisibile, pentru care $x \geq 0$, până la găsirea unei baze care să fie şi dual admisibilă, pentru care $\Delta_j \leq 0, \forall j \in \overline{1,n}$, sau până la verificarea condiţiilor pentru optim infinit.

Algoritmul SIMPLEX Dual explorează bazele dual admisibile, pentru care $\Delta_j \leq 0, \forall j \in \overline{1,n}$, până când se identifică o bază care să fie şi primal admisibilă, pentru care $x \geq 0$, sau până la punerea în evidenţă a faptului că problema primală nu are programe.

Fie $\mathcal{B}_0 = \{i_1^0, i_2^0, \ldots, i_m^0\}$ mulţimea indicilor vectorilor coloană din matricea A care formează o bază dual admisibilă pentru problema (3.17) şi

$$\mathfrak{B}^- = \{i \in \mathcal{B}_0 \,|\, x_i^0 < 0\}.$$

Dacă $\mathfrak{B}^- = \emptyset$, adică $x^0 \geq 0$, atunci baza definită de $\mathcal{B}_0$ este şi primal admisibilă, deci x^0 este soluţie optimă a problemei primale (3.17).

Teorema 3.2.1 *Fie $\left\{\mathfrak{a}_{i_1^q}, \mathfrak{a}_{i_2^q}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_i^q}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_m^q}\right\}$ o bază dual admisibilă (de la pasul q) pentru problema primală (3.17) şi $\mathfrak{B}^- \neq \emptyset$. Dacă există $i \in \mathfrak{B}^-$ astfel încât $z_{ij}^q \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{S}_q = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}_q$, atunci problema primală (3.17) nu are soluţii primal admisibile ($P = \emptyset$).*

Demonstraţie. Fie $(u^q)^{\mathrm{T}} = c^{\mathrm{T}}B_q^{-1}$ programul dual corespunzător pasului q. Notăm cu $\mathfrak{b}_i^q$ linia i din matricea B_q^{-1} şi, pentru $\alpha \in \mathbb{R}_+$, construim vectorul

$$u(\alpha) = u^q - \alpha\mathfrak{b}_i^q \in \mathbb{R}^m. \tag{3.22}$$

Avem

$$(u(\alpha))^{\mathrm{T}}a^j = (u^q)^{\mathrm{T}}a^j - \alpha\mathfrak{b}_i^{q\mathrm{T}}a^j = \Delta_j^q + c_j - \alpha z_{ij}^q \leq c_j, \ \ \forall j \in \overline{1,n},$$

adică $u(\alpha) \in D$, $\forall \alpha \geq 0$.

În final, din

$$\lim_{\alpha\to+\infty}(u(\alpha))^{\mathrm{T}}b = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[(u^q)^{\mathrm{T}}b - \alpha\mathfrak{b}_i^{q\mathrm{T}}b\right] = \lim_{\alpha\to+\infty}[z_{00}^q - \alpha x_i^q] = +\infty$$

deducem că problema duală (3.18) are optim infinit şi, conform Teoremei fundamentale a dualităţii, problema primală (3.17) nu are soluţii primal admisibile. ■

Teorema 3.2.2 *Fie $\mathbf{B}_q = \left\{\mathfrak{a}_{i_1^q}, \mathfrak{a}_{i_2^q}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_i^q}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_m^q}\right\}$ o bază dual admisibilă (de la pasul q) pentru problema primală (3.17) şi $\mathfrak{B}^- \neq \emptyset$. Dacă pentru orice $i \in \mathfrak{B}^-$ există $j \in \mathcal{S}_q = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}_q$ astfel încât $z_{ij}^q < 0$, atunci, pentru $i' \in \mathfrak{B}^-$, arbitrar, şi $j' \in \mathcal{S}_q$ ales astfel încât*

$$\frac{\Delta_{j'}^q}{z_{i'j'}^q} = \min\left\{\left.\frac{\Delta_j^q}{z_{i'j}^q}\,\right|\, z_{i'j}^q < 0, j \in \mathcal{S}_q\right\}, \tag{3.23}$$

baza corespunzătoare mulţimii de indici $\mathcal{B}_{q+1} = \mathcal{B}_q \setminus \{i'\} \cup \{j'\}$ *este dual admisibilă şi*

$$(u^{q+1})^{\mathrm{T}} b \geq (u^q)^{\mathrm{T}} b.$$

Demonstraţie. Cum $z^q_{i'j'} \neq 0$, rezultă, conform lemei substituţiei, că $\mathbf{B}_{q+1}$ este bază. Să verificăm că este dual admisibilă. Pentru aceasta calculăm, cu regula dreptunghiului, elementele Δ^{q+1}_j:

$$\Delta^{q+1}_j = \Delta^q_j - \Delta^q_{j'} \frac{z^q_{i'j}}{z^q_{i'j'}}, \quad \forall j \in \overline{1,n} \tag{3.24}$$

Din faptul că $\mathbf{B}_q$ este bază dual admisibilă deducem că $\Delta^q_j \leq 0$, $\forall j \in \mathcal{S}_q$ şi $\Delta^q_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}_q$. Fie $j \in \mathcal{S}_q$.

– dacă $z^q_{i'j} \geq 0$, atunci, din (3.24) deducem $\Delta^{q+1}_j \leq 0$.

– dacă $z^q_{i'j} < 0$, utilizând şi relaţia (3.23), avem

$$\Delta^{q+1}_j \leq \Delta^q_j - \frac{\Delta^q_j}{z^q_{i'j}} z^q_{i'j} = 0.$$

Pentru $j = i_{i'}$ avem

$$\Delta^{q+1}_{i'} = 0 - \Delta^q_{j'} \frac{1}{z^q_{i'j'}} < 0.$$

Prin urmare $\Delta^{q+1}_j \leq 0$, $\forall j \in \mathcal{S}_{q+1}$, adică $\mathbf{B}_{q+1}$ este dual admisibilă.

Pentru verificarea ultimei inegalităţi este suficient să determinăm valoarea funcţiei obiectiv

$$z^{q+1}_{00} = z^q_{00} - \Delta^q_{j'} \frac{x^q_{i'}}{z^q_{i'j'}} \geq z^q_{00}$$

şi să observăm că $z^q_{00} = (u^q)^{\mathrm{T}} b$, iar $z^{q+1}_{00} = (u^{q+1})^{\mathrm{T}} b$. ∎

Alegerea indicelui $i' \in \mathfrak{B}^-$ a fost arbitrară. Pentru a obţine o valoare cât mai mare pentru z^{q+1}_{00} indicele i' ar trebui ales astfel încât

$$\Delta^q_{j'} \frac{x^q_{i'}}{z^q_{i'j'}} = \min \left\{ \Delta^q_{j'} \frac{x^q_i}{z^q_{ij'}} \;\middle|\; i \in \mathfrak{B}^- \right\}. \tag{3.25}$$

Întrucât alegerea indicelui j' depinde de alegerea lui i', acest criteriu este dificil de aplicat în practică. Pentru simplificarea algoritmului este înlocuit cu altul mai simplu: se alege $i' \in \mathfrak{B}^-$ astfel încât

$$x^q_{i'} = \min_{i \in \mathfrak{B}^-} \{x^q_i\}. \tag{3.26}$$

Algoritmul SIMPLEX Dual presupune următorii paşi:

Pasul 1. Se determină o bază dual admisibilă $\mathbf{B}_0$ şi se completează tabloul SIMPLEX corespunzător.

Pasul 2. Se determină mulţimea $\mathfrak{B}^-$ şi se face analiza tabloului:

– dacă $\mathfrak{B}^- = \emptyset$, atunci baza este şi primal admisibilă, deci s-a determinat un program optim. STOP.

– dacă există $i \in \mathfrak{B}^-$ pentru care $z^q_{ij} \geq 0$, $\forall j \in \overline{1,n}$, atunci problema iniţială nu are programe. STOP.

– dacă pentru orice $i \in \mathfrak{B}^-$ există $j \in \overline{1,n}$ astfel încât $z^q_{ij} < 0$, atunci se trece la pasul următor.

Pasul 3. Se determină $i' \in \mathfrak{B}^-$ folosind *criteriul de ieşire din bază* (3.26) şi apoi $j' \in \mathcal{S}_q$ folosind *criteriul de intrare în bază* (3.23). Se construieşte noua bază $\mathbf{B}_{q+1}$ pornind de la mulţimea de indici $\mathcal{B}_{q+1} = \mathcal{B}_q \setminus \{i'\} \cup \{j'\}$ şi se prelucrează tabloul cu lema substituţiei cu pivotul în poziţia $(i'j')$. Se continuă cu pasul 2.

3.3 Determinarea unei baze dual admisibile

Fie $\mathbf{B}_0$ o bază formată din m coloane liniar independente ale matricii A a problemei (3.17). Dacă $\Delta_j^0 \leq 0$, $\forall j \in \overline{1,n}$ atunci $\mathbf{B}_0$ este dual admisibilă. Dacă nu, se consideră următoarea problemă de programare liniară obţinută din problema (3.17) la care s-a adăugat o restricţie suplimentară

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_0} x_j \leq M, \quad (M \in \mathbb{R}) \tag{3.27}$$

şi o variabilă ecart x_{n+1}:

$$\begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x \\ Ax = b \\ \sum_{j \in \mathcal{S}_0} x_j + x_{n+1} = M \\ x \geq 0, \ x_{n+1} \geq 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

Notăm

$$A' = (a'_{ij})_{\substack{i=1,m+1 \\ j=1,n+1}}, \quad b' = \begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix}, \quad c' = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

unde $a'_{ij} = a_{ij}$ pentru $i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$, $a'_{m+1,j} = 0$ pentru $j \in \mathcal{B}_0$, $a'_{m+1,j} = 1$ pentru $j \in \mathcal{S}_0$, $a'_{i,n+1} = 0, \forall i \in \overline{1,m}$ şi $a'_{m+1,n+1} = 1$.

Cu aceste notaţii problema (3.28) se mai scrie

$$\begin{cases} \min (c')^{\mathrm{T}} x' \\ A'x' = b' \\ x' \geq 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

Fie $\mathbf{B}'_0$ baza definită de mulţimea de indici $\mathcal{B}'_0 = \mathcal{B}_0 \cup \{n+1\}$ şi $j' \in \mathcal{S}_0$ astfel încât

$$\Delta_{j'}^0 = \max_{j \in \mathcal{S}_0} \Delta_j^0 \tag{3.31}$$

Baza $\mathbf{B}'_1$ definită de mulţimea de indici $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'_0 \setminus \{n+1\} \cup \{j'\}$ este dual admisibilă deoarece

$$\Delta_j^1 = \Delta_j^0 - \Delta_{j'}^0 \leq 0, \ \forall j \in \overline{1,n}$$

şi

$$\Delta_{n+1}^1 = -\Delta_{j'}^0 < 0.$$

Aplicând algoritmul SIMPLEX Dual ajungem (abstracţie făcând de cazurile în care apare ciclarea) la una din următoarele situaţii:

– problema (3.30) nu are programe. Atunci nici problema iniţială (3.17) nu are programe. (Dacă x ar fi un program al problemei (3.17), atunci, pentru M suficient de mare şi $x_{n+1} = M - \sum_{j \in \mathcal{S}_0} x_j$, x' ar fi program pentru problema (3.30).)

– problema (3.30) are un program optim corespunzător unei baze $\mathbf{B}'_q$. Distingem două cazuri:

i) $n+1 \in \mathcal{B}_q$. Atunci, pentru M suficient de mare avem $x_{n+1} = M - \sum_{j \in \mathcal{S}_0} x_j > 0$, şi deci se poate renunţa la restricţia (3.27). Obţinem x^q soluţie optimă a problemei iniţiale (3.17).

ii) $n+1 \notin \mathcal{B}_q$. Atunci variabilele x_i^q, $i \in \mathcal{B}_q$ sunt funcţii de M. Dacă valoarea funcţiei obiectiv a problemei (3.30) corespunzătoare bazei $\mathbf{B}'_q$ este funcţie de M, pentru M suficient de mare, atunci problema (3.30) are optim infinit. Ţinând cont că funcţiile obiectiv ale celor două probleme, (3.30) şi (3.17), coincid şi că orice program al problemei (3.17) este program şi pentru (3.30) deducem că şi problema iniţială are optim infinit.

Dacă valoarea funcţiei obiectiv este independentă de M, pentru M suficient de mare, atunci programul optim se determină alegând M astfel încât una dintre variabilele nenegative care sunt funcţii de M se anulează.

Chapter 4

Elemente de teoria aşteptării

Obiectul teoriei aşteptării este studiul şi interpretarea, în vederea unei organizări optime, a fenomenelor de aşteptare, adică a acelor fenomene de natură tehnică sau socială în care existenţa unui mecanism ce execută un serviciu de masă implică aşteptarea sau aglomeraţia solicitanţilor.

Modelul matematic al unui astfel de fenomen de aşteptare se numeşte **model (sistem) de aşteptare (servire)**.

Componentele principale ale unui model de aşteptare sunt:

1. **Fluxul de intrare**
2. **Firul de aşteptare**
3. **Sistemul de servire**
4. **Fluxul de ieşire**

Fluxul de intrare reprezintă ansamblul de indicatori care descriu evoluţia în timp a cererii serviciului de către masa solicitanţilor. El se caracterizează prin numărul de unităţi care intră în sistem într-o unitate de timp. În general se presupune că intrările în sistem sunt aleatoare şi independente, ceea ce înseamnă că probabilitatea ca o unitate să intre în sistem este independentă atât de momentul în care se produce intrarea cât şi de numărul de unităţi existente deja în sistem sau de numărul de unităţi ce vor sosi. Numărul de unităţi care alcătuiesc fluxul de intrare poate fi finit sau infinit.

Firul de aşteptare, în înţeles pur fizic, este camera de aşteptare, adică spaţiul în care unităţile sosite aşteaptă momentul începerii servirii, dacă acesta nu coincide cu momentul sosirii lor. În acest spaţiu, care poate avea capacitate limitată sau nelimitată, unităţile se dispun în *şiruri de aşteptare*. Disciplina şirului de aşteptare este regula care precizează ordinea în care sunt satisfăcute cererile unităţilor.

Există două discipline naturale:

– FIFO — *primul venit, primul servit*

– LIFO — *ultimul venit, primul servit*

Alegerea unităţilor pentru servire se poate face în mod întâmplător sau prin acordarea unor priorităţi unor unităţi faţă de altele.

Într-un sistem de aşteptare cu mai multe staţii de servire poate exista un singur şir de aşteptare sau se pot forma mai multe şiruri de aşteptare, inclusiv cu posibilitatea ca fiecare şir de aşteptare să aibă propria disciplină. Unităţile se aşează în şirul corespunzător staţiei pe care şi-au ales-o pentru a le servi.

Sistemul de servire este ansamblul fizic care asigură serviciul solicitat de unităţi. El este alcătuit din una sau mai multe *staţii* de servire care execută integral sau parţial servirea unităţilor.

Numărul staţiilor poate fi finit sau infinit. Dacă numărul staţiilor este infinit, atunci toate unităţile vor fi servite imediat ce intră în sistem, fără a se forma fir de aşteptare.

În legătură cu modul de servire a unităţilor distingem:

– *serviciul individual*, în care o singură unitate este servită şi apoi aceasta părăseşte definitiv sistemul; staţia, după ce a servit ultima unitate din sistem, rămâne inactivă până la sosirea unei noi unităţi;

– *serviciul în grup*, în care sunt servite toate unităţile care aşteaptă, până la un număr maxim dat. Când staţia termină de servit un grup, îl serveşte pe al doilea etc. Când nu mai sunt unităţi în firul de aşteptare, staţia rămâne inactivă până la formarea unui nou grup;

– *serviciul în masă*, pentru care se presupune că numărul de unităţi care intră în staţie nu poate depăşi un număr dat. Staţia funcţionează fără întrerupere un interval de timp determinat, în care sunt servite toate unităţile care se află în şirul de aşteptare sau care au sosit în sistem până la sfârşitul intervalului de funcţionare stabilit.

Dacă staţiile oferă independent una de alta servicii identice pentru toate unităţile din sistem, iar unităţile servite de o staţie părăsesc sistemul, se spune că staţiile sunt în paralel. Staţiile pot fi dispuse şi în serie (cascadă). În acest caz, o unitate, pentru a fi servită complet, trece succesiv dintr-o staţie de servire în alta.

Fluxul de servire prezintă importanţă în sistemele de aşteptare cu staţii de servire aşezate în serie, când fluxul de ieşire dintr-o staţie devine flux de intrare pentru staţia următoare.

4.1 Clasificarea modelelor de aşteptare

Având în vedere complexitatea unui model de aşteptare se pot stabili mai multe criterii pentru clasificare. Ne limităm acum la două:

– după numărul şirurilor de aşteptare şi al staţiilor de servire:

1. un şir, o staţie
2. un şir, mai multe staţii
3. mai multe şiruri, o staţie
4. mai multe şiruri, mai multe staţii

– după natura sosirilor şi serviciilor:

i) sosiri constante, servicii constante

ii) sosiri aleatoare, servicii constante

iii) sosiri constante, servicii aleatoare

iv) sosiri aleatoare, servicii aleatoare

4.2 Distribuţia Poisson

Definiţia 4.2.1 *Spunem că un sistem de aşteptare are* **repartiţie poissoniană** *dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

i) probabilitatea ca, la un moment dat, să sosească o nouă unitate este constantă şi nu depinde de evoluţia anterioară;

ii) probabilitatea ca într-un interval de timp foarte mic, $(t, t + \Delta t)$*, să sosească o unitate este proporţională cu lungimea intervalului,* Δt*, oricare ar fi* t*, adică este egală cu* $\lambda\Delta t + O(\Delta t)$*,* $\forall t$*, unde*

$$\lim_{\Delta t \to 0} O(\Delta t) = 0, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0;$$

iii) probabilitatea ca în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ *să sosească cel puţin două unităţi este egală cu zero.*

Considerăm în continuare că sistemul de aşteptare are repartiţie poissoniană şi ne propunem să determinăm probabilitatea ca, la momentul t, în sistem să fie n unităţi. Notăm această probabilitate cu $P_n(t)$ şi presupunem că funcţiile $P_n(t)$ au proprietăţi de continuitate şi derivabilitate suficiente şi că

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1. \tag{4.1}$$

Se presupune că la momentul $t = 0$, în sistem nu există nici o unitate, deci se mai adaugă condiţiile iniţiale:

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Considerăm mai întâi $n = 0$ şi determinăm $P_0(t + \Delta t)$, adică probabilitatea ca în intervalul $(0, t + \Delta t)$ să nu sosească nici o unitate. Această situaţie este posibilă numai dacă nu sosesc unităţi nici în intervalul $(0, t)$ şi nici în intervalul $(t, t + \Delta t)$.

Probabilitatea ca în intervalul de timp $(0, t)$ să nu sosească nici o unitate este $P_0(t)$.

Probabilitatea ca in intervalul $(t, t+\Delta t)$ să sosească cel puţin o unitate este, conform presupunerii, $\lambda\Delta t$. Prin urmare probabilitatea ca în intervalul $(t, t + \Delta t)$ să nu sosească nici o unitate este $1 - \lambda\Delta t$.

Conform presupunerii făcute, că sistemul de aşteptare are repartiţie poissoniană, cele două evenimente: *"în intervalul $(0, t)$ nu soseşte nici o unitate"* şi *"în intervalul $(t, t + \Delta t)$ nu soseşte nici o unitate"* sunt independente, deci

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda\Delta t). \tag{4.3}$$

Putem scrie ($\Delta t \neq 0$):

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

Trecând la limită pentru $\Delta t \to 0$ obţinem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t),$$

deci

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t). \tag{4.4}$$

Integrăm ecuaţia diferenţială (4.4)

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \Rightarrow \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt \Rightarrow \ln P_0(t) = -\lambda t + \ln C \Rightarrow \ln \frac{P_0(t)}{C} = -\lambda t$$

şi obţinem

$$P_0(t) = Ce^{-\lambda t}. \tag{4.5}$$

Pentru determinarea constantei C ţinem cont de condiţiile iniţiale, adică de relaţia $P_0(0) = 1$. Înlocuind $t = 0$ în relaţia (4.5) obţinem $P_0(0) = C$. Prin urmare $C = 1$.

Deci probabilitatea ca în intervalul $(0, t)$ să nu sosească nici o unitate este

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{4.6}$$

Pentru determinarea probabilităţii $P_n(t)$ pornim cu stabilirea legăturii dintre $P_n(t + \Delta t)$ şi $P_n(t)$. Pentru ca în intervalul $(0, t + \Delta t)$ să sosească n unităţi trebuie să se întâmple una din situaţiile:

– să sosească n unităţi în intervalul $(0, t)$ şi să nu sosească nici o unitate în intervalul $(t, t + \Delta t)$;

– să sosească $n - 1$ unităţi în intervalul $(0, t)$ şi o unitate în intervalul $(t, t + \Delta t)$.

Deoarece cele două evenimente sunt incompatibile, avem

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + O(\Delta t). \tag{4.7}$$

Relaţia precedentă se poate scrie sub forma

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t},$$

care, prin trecere la limită pentru $\Delta t \to 0$, devine

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t). \tag{4.8}$$

Pentru $n = 1$ avem

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) \Leftrightarrow P_1'(t) + \lambda P_1(t) - \lambda e^{-\lambda t} = 0. \tag{4.9}$$

Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi din relaţia (4.9) are soluţia

$$P_1(t) = e^{-\int \lambda dt}\left[C + \int \lambda e^{-\lambda t} e^{\int \lambda dt} dt\right] = e^{-\lambda t}[C + \lambda t]. \tag{4.10}$$

Pentru determinarea constantei C considerăm evenimentul *”la momentul* $t = 0$ *este sosită o unitate”*, adică relaţia $P_1(0) = 0$, şi obţinem, pentru $t = 0$, $C = 0$. Deci

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}. \tag{4.11}$$

Procedând analog, pentru $n = 2$, din (4.8), obţinem

$$P_2'(t) + \lambda P_2(t) - \lambda P_1(t) = 0 \Leftrightarrow P_2'(t) + \lambda P_2(t) - \lambda^2 t e^{-\lambda t} = 0, \tag{4.12}$$

care are soluţia generală

$$P_2(t) = e^{-\lambda t}\left[C + \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right]. \tag{4.13}$$

Ţinând cont de (4.2), obţinem $C = 0$. Urmează

$$P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}. \tag{4.14}$$

În continuare vom demonstra, folosind metoda inducţiei matematice complete, că probabilitatea ca în intervalul $(0, t)$ să sosească n unităţi este

$$P_n(t) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{4.15}$$

Din (4.11) deducem că, pentru $n = 1$, afirmaţia este adevărată. Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n = k$

$$P_k(t) = \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

şi demonstrăm că rămâne adevărată şi pentru $n = k + 1$, adică

$$P_{k+1}(t) = \frac{\lambda^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t}.$$

Din (4.8), pentru $n = k + 1$, obţinem ecuaţia diferenţială

$$P_{k+1}'(t) + \lambda P_{k+1}(t) - \lambda P_k(t) = 0 \Leftrightarrow P_{k+1}'(t) + \lambda P_{k+1}(t) - \frac{\lambda^{k+1} t^k}{k!} e^{-\lambda t} = 0,$$

care are soluţia generală

$$P_{k+1}(t) = e^{-\lambda t}\left[C + \frac{\lambda^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}\right].$$

Din relaţia (4.2) deducem $C = 0$ şi

$$P_{k+1}(t) = \frac{\lambda^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda t}. \tag{4.16}$$

Pentru modelul considerat, numărul sosirilor într-un interval de timp $(0, t)$ are repartiţie Poisson de parametru λ de forma

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}.$$

Dacă notăm cu N_t variabila aleatoare discretă ce reprezintă numărul de sosiri în intervalul de timp $(0, t)$, atunci valoarea medie a lui N_t este λt. Prin urmare coeficientul de proporţionalitate λ, introdus iniţial, reprezintă numărul mediu de unităţi sosite în unitatea de timp.

4.3 Repartiţia exponenţială

Un element important care intervine în studiul modelelor de aşteptare este repartiţia timpului dintre două sosiri consecutive. Notăm cu T o variabilă aleatoare care reprezintă timpul dintre două sosiri consecutive şi considerăm ca moment iniţial momentul în care a sosit prima dintre cele două unităţi.

Probabilitatea ca timpul T să fie mai mare decât un timp curent oarecare $t > 0$ este egală cu probabilitatea ca în intervalul de timp $(0, t)$ să nu sosească nici o unitate:

$$P(T > t) = P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Probabilitatea evenimentului contrar

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

reprezintă funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare T:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Densitatea de repartiţie este

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

deci repartiţia timpului dintre două sosiri consecutive este o repartiţie exponenţială.

Media acestei repartiţii este

$$M = \int_0^\infty tf(t)dt = \frac{1}{\lambda},$$

deci intervalul mediu dintre două sosiri consecutive este inversul numărului mediu de sosiri în unitatea de timp.

4.4 Model general cu sosiri poissoniene şi timp de servire exponenţial

4.4.1 Ecuaţii de stare

Pentru ca un model să se încadreze în această categorie trebuie să îndeplinească următoarele cerinţe:

1. probabilitatea ca să sosească o unitate într-un interval de timp foarte scurt $(t, t+\Delta t)$ este proporţională cu lungimea intervalului, Δt, indiferent de valoarea lui t, adică este $\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$, $\forall t > 0$, unde

$$\lim_{\Delta t \to \infty} O(\Delta t) = 0, \quad \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

iar n este numărul unităţilor din sistem. Probabilitatea ca în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ să nu sosească nici o unitate este

$$1 - [\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)]\,;$$

2. probabilitatea ca în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ o unitate să părăsească sistemul este

$$\mu_n \Delta t + O(\Delta t), \quad \forall t,$$

iar probabilitatea ca în acelaşi interval de timp nici o unitate să nu părăsească sistemul

$$1 - \mu_n \Delta t - O(\Delta t), \quad \forall t;$$

3. probabilitatea ca în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ să sosească cel puţin două unităţi este egală cu zero.

Cazul $n = 0$

La momentul de timp $t + \Delta t$ nu există nici o unitate în sistemul de aşteptare dacă se întâmplă una din situaţiile posibile:

a) la momentul de timp t nu există nici o unitate în sistem şi nu soseşte nici o unitate în intervalul $(t, t+\Delta t)$;

b) la momentul de timp t există, în sistem, o unitate care părăseşte sistemul în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ şi, în acelaşi interval de timp, nu soseşte nici o unitate.

Cele două situaţii corespund la evenimente incompatibile, formate din evenimente independente, deci probabilitatea ca la momentul de timp $t+\Delta t$ să nu fie nici o unitate în sistemul de aşteptare este

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t - O(\Delta t)) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t + O(\Delta t))(1 - \lambda_1 \Delta t - O(\Delta t)).$$

După un calcul simplu obţinem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t),$$

adică

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t). \tag{4.17}$$

Cazul $n \neq 0$

Pentru determinarea probabilităţii ca în sistem să existe n unităţi la momentul de timp $t + \Delta t$, notată $P_n(t+\Delta t)$, identificăm mai întâi situaţiile posibile:

a) la momentul t, în sistem sunt $n-1$ unităţi, în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ soseşte o unitate şi, în acelaşi interval de timp, nici o unitate nu părăseşte sistemul;

b) la momentul t, în sistem sunt n unităţi şi în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ nu soseşte şi nu părăseşte sistemul nici o unitate;

c) la momentul t, în sistem sunt n unităţi şi, în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$, o unitate soseşte în sistem şi una îl părăseşte;

d) la momentul t, în sistem sunt $n+1$ unităţi, iar în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ o unitate părăseşte sistemul fără ca vreo unitate nouă să sosească.

Prin urmare evenimentul *"la momentul de timp $t + \Delta t$ în sistem există n unităţi"* este reuniunea a patru evenimente incompatibile, fiecare dintre acestea fiind intersecţie de evenimente independente. Urmează

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + O(\Delta t))(1 - \mu_{n-1} \Delta t - O(\Delta t)) +$$

$$P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t - O(\Delta t))(1 - \mu_n \Delta t - O(\Delta t)) +$$

$$P_n(t)(\lambda_n \Delta t + O(\Delta t))(\mu_n \Delta t + O(\Delta t)) +$$

$$P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t - O(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + O(\Delta t))$$

şi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t),$$

care conduce la ecuaţia diferenţială

$$P_n'(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t). \tag{4.18}$$

Sistemul ecuaţiilor de stare este un sistem liniar cu număr infinit de ecuaţii generate de ecuaţiile (4.17) şi (4.18). Pentru rezolvarea lui se ţine cont de condiţiile iniţiale (4.1) şi (4.2). Rezolvarea o facem pentru cazul particular (staţionar) în care $P_n(t) = p_n, \forall t \geq 0, n = 0, 1, 2, ...$ Obţinem sistemul ecuaţiilor de stare

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 - \mu_1 p_1 = 0 \\ \lambda_{n-1} p_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n) p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} = 0, \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{4.19}$$

cu condiţia iniţială

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1. \tag{4.20}$$

Din prima ecuaţie se obţine

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0,$$

care, înlocuit în a doua ecuaţie, conduce la

$$p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0.$$

Procedând analog obţinem

$$p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0.$$

Se verifică prin inducţie completă că

$$p_n = p_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}, \forall n \geq 1. \tag{4.21}$$

Pentru $n = 1$, din (4.21) obţinem

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0,$$

relaţie care a fost deja verificată.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n \leq m$ şi demonstrăm că rămâne adevărată şi pentru $n = m + 1$.

Înlocuind valorile pentru p_m şi p_{m-1} obţinute din (4.21) în ecuaţia obţinută din (4.19) pentru $n = m$, rezultă

$$\lambda_{m-1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{m-2}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{m-1}} p_0 - (\lambda_m + \mu_m) \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{m-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m} p_0 + \mu_{m+1} p_{m+1} = 0,$$

relaţie din care se deduce

$$p_{m+1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_m}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{m+1}} p_0,$$

care încheie inducţia.

Valoarea p_0 se poate determina din relaţia (4.20), care, ţinând cont de (4.21), devine

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) p_0 = 1$$

şi din care se obţine

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right)^{-1}. \tag{4.22}$$

Prin urmare, pentru cazul staţionar, valorile probabilităţilor p_n sunt:

$$p_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right)^{-1}, \forall n \geq 1. \tag{4.23}$$

În continuare considerăm un sistem de aşteptare cu sosiri poissoniene având s staţii de servire cu timp de servire exponenţial şi precizăm câteva notaţii:

1. n = variabila aleatoare care reprezintă **numărul de unităţi din sistem**. Este o variabilă discretă şi se poate scrie astfel:

$$n : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}.$$

Valoarea medie a acestei variabile este

$$\overline{n} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k.$$

2. n_f = variabila aleatoare care reprezintă **numărul de unităţi din firul de aşteptare**. Este o variabilă discretă şi se poate scrie astfel:

$$n_f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ p_0 + p_1 + \dots + p_s & p_{s+1} & \dots & p_{s+k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Valoarea medie a acestei variabile este

$$\overline{n}_f = 0 \cdot \sum_{i=0}^{s} p_i + \sum_{k=1}^{\infty} k p_{s+k} \Leftrightarrow \overline{n}_f = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) p_n.$$

3. n_s = variabila aleatoare care reprezintă **numărul de unităţi în curs de servire**. Este o variabilă discretă şi se poate scrie astfel:

$$n_s : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & s-1 & s \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{s-1} & \sum\limits_{n=s}^{\infty} p_n \end{pmatrix}.$$

Valoarea medie a acestei variabile este

$$\overline{n}_s = \sum_{k=0}^{s-1} k p_k + s \sum_{k=s}^{\infty} p_k.$$

Observaţia 4.4.1 *Între aceste trei variabile aleatoare există relaţia*

$$n = n_f + n_s,$$

iar între valorile medii ale lor

$$\overline{n} = \overline{n}_f + \overline{n}_s.$$

4. t = variabila aleatoare care reprezintă **timpul de aşteptare al unei unităţi în sistem** şi are valoarea medie dată de relaţia:

$$\bar{t} = \frac{\overline{n}}{\lambda_{\overline{n}}}.$$

5. t_f = variabila aleatoare care reprezintă **timpul de aşteptare al unei unităţi în fir** şi are valoarea medie dată de relaţia:

$$\bar{t}_f = \frac{\overline{n}_f}{\lambda_{\overline{n}}}.$$

6. t_s = variabila aleatoare care reprezintă **timpul de servire a unei unităţi în sistem** şi are valoarea medie dată de relaţia:

$$\bar{t}_s = \frac{\overline{n}_s}{\lambda_{\overline{n}}}.$$

Observaţia 4.4.2 *Pentru studiul performanţei sistemului de aşteptare se determină valorile medii ale variabilelor definite mai sus.*

Alte măsuri ale performanţei mai sunt:

– intensitatea de trafic (sau factorul de serviciu) definită prin

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

– factorul de utilizare a staţiilor de servire

$$\rho^\star = \frac{\lambda}{s\mu},$$

care este identic cu ρ pentru $s = 1$.

4.5 Model de sistem cu un şir de aşteptare, o staţie de servire, populaţie infinită

Sistemul de aşteptare considerat are o singură staţie şi un singur şir de aşteptare care este nelimitat.

Unităţile sosesc aleator, repartiţia lor fiind de tip Poisson, de parametru λ, indiferent de starea sistemului, deci $\lambda_n = \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru o unitate care soseşte în sistemul de aşteptare se disting două situaţii:

– staţia de servire este liberă şi unitatea este servită imediat, deci timpul petrecut în sistem este egal cu timpul de servire;

– staţia de servire este ocupată, deci unitatea se aşează în şirul de aşteptare până se eliberează staţia de servire. Timpul petrecut în sistemul de aşteptare este egal cu suma dintre timpul petrecut în şirul de aşteptare şi timpul de servire.

Servirea nu depinde de starea sistemului, deci $\mu_n = \mu$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Din relaţia (4.22) obţinem

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)^{-1}.$$

Seria precedentă are raţia $\rho > 0$ şi este convergentă dacă şi numai dacă $\rho < 1$. Obţinem

$$p_0 = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho. \tag{4.24}$$

Din (4.23) deducem

$$p_n = \rho^n p_0 = \rho^n(1-\rho), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Numărul mediu de unităţi din sistem este

$$\overline{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n(\rho - 1) = \rho(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} =$$

$$\rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)=\rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)=\rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{1-\rho}. \tag{4.26}$$

În continuare calculăm parametrii prezentaţi în paragraful precedent:

$$n_s=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_0 & 1-p_0 \end{pmatrix},$$

deoarece numărul unităţilor în curs de servire este cel mult egal cu 1.

Rezultă

$$\overline{n}_s=1-p_0=1-(1-\rho)=\rho. \tag{4.27}$$

Urmează

$$\overline{n}_f=\overline{n}-\overline{n}_s=\frac{\rho}{1-\rho}-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{4.28}$$

$$\bar{t}_f=\frac{\overline{n}_f}{\lambda}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{4.29}$$

$$\bar{t}=\frac{\overline{n}}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}=\frac{1}{\mu-\lambda} \tag{4.30}$$

$$\bar{t}_s=\frac{\overline{n}_s}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda}=\frac{1}{\mu}. \tag{4.31}$$

Probabilitatea ca, la un moment dat, în sistem să fie cel puţin $k+1$ unităţi este:

$$P(n>k)=p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}p_{k+i}=\sum_{i=1}^{\infty}\rho^{k+i}(1-\rho)=$$

$$=\rho^{k+1}(1-\rho)\sum_{i=1}^{\infty}\rho^{i-1}=\rho^{k+1}(1-\rho)\frac{1}{1-\rho}=\rho^{k+1}. \tag{4.32}$$

Probabilitatea ca timpul de aşteptare în fir al unei unităţi să fie mai mare decât τ este

$$P(t_f>\tau)=\rho e^{-(\mu-\lambda)\tau}.$$

4.6 Model de sistem cu un şir de aşteptare, o staţie de servire, populaţie finită

Sistemul de aşteptare considerat are o singură staţie de servire şi un singur şir de aşteptare finit, cu m elemente.

Unităţile sosesc aleator. Probabilitatea ca într-un interval scurt de timp de lungime Δt să sosească o unitate este cu atât mai mică cu cât numărul unităţilor din sistem este mai mare. Presupunem că aceasta este proporţională cu numărul unităţilor care nu sunt încă în sistemul de aşteptare:

$$\lambda_n=(m-n)\lambda,\quad n=\overline{0,m-1}.$$

Coeficientul μ_n nu depinde de numărul de unităţi din sistem deoarece există o singură staţie de servire, deci

$$\mu_n=\mu,\quad \forall n=\overline{1,m}.$$

Avem

$$p_n=p_0\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}=p_0\frac{m\lambda(m-1)\lambda\cdots(m-n+1)\lambda}{\mu^n}=$$

$$=p_0m(m-1)\cdots(m-n+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=A_m^n\rho^np_0 \tag{4.33}$$

Pentru determinarea lui p_0 folosim condiţia $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$, deci

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{m} A_m^n \rho^n\right)^{-1}. \tag{4.34}$$

Urmează:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{m} np_n = \sum_{n=0}^{m}[m-(m-n)]p_n = m\sum_{n=0}^{m} p_n - \sum_{n=0}^{m}(m-n)p_n =$$

$$= m - \sum_{n=0}^{m-1}(m-n)p_n = m - \sum_{n=0}^{m-1}(m-n)A_m^n\rho^n p_0 =$$

$$= m - \frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{m-1} A_m^{n+1}\rho^{n+1}p_0 = m - \frac{1}{\rho}(p_1+p_2+\ldots+p_m) = m - \frac{1}{\rho}(1-p_0) \tag{4.35}$$

$$\overline{n}_s = 0\cdot p_0 + 1\cdot(1-p_0) = 1-p_0 \tag{4.36}$$

$$\overline{n}_f = \overline{n} - \overline{n}_s = m - \frac{1}{\rho}(1-p_0) - (1-p_0) = m - \left(1-\frac{1}{\rho}\right)(1-p_0) \tag{4.37}$$

$$\bar{t}_f = \frac{\overline{n}_f}{\lambda_{\overline{n}}} = \frac{\overline{n}_f}{\lambda(m-\overline{n})} = \frac{m}{\mu(1-p_0)} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \tag{4.38}$$

$$\bar{t}_s = \frac{\overline{n}_s}{\lambda_{\overline{n}}} = \frac{1-p_0}{\lambda\frac{\mu}{\lambda}(1-p_0)} = \frac{1}{\mu} \tag{4.39}$$

$$\bar{t} = \bar{t}_f + \bar{t}_s = \frac{m}{\mu(1-p_0)} - \frac{1}{\lambda} \tag{4.40}$$

Observaţia 4.6.1 *Pentru acest model nu se impun restricţii asupra lui ρ.*

4.7 Model de sistem cu un şir de aşteptare, s staţii de servire identice, populaţie infinită

Pentru acest model se presupun următoarele:

– repartiţia sosirilor este de tip Poisson;

– dacă există cel puţin o staţie de servire liberă în momentul sosirii unei unităţi, atunci această unitate va fi servită imediat (timpul petrecut în sistemul de aşeptare fiind egal cu timpul de servire);

– dacă nu există nici o staţie de servire liberă în momentul sosirii unei unităţi, atunci unitatea se aşează in şirul de aşteptare (timpul petrecut în sistemul de aşteptare fiind egal cu suma dintre timpul de aşteptare în fir şi timpul de servire);

– disciplina din firul de aşteptare este *primul sosit, primul servit*;

– staţiile sunt echivalente, dispuse paralel şi cu acelaşi parametru de servire (μ);

– $\lambda_n = \lambda$, $\forall n \geq 1$ (caz staţionar).

O primă observaţie:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s \\ s\mu, & n > s \end{cases}.$$

Avem:

– pentru $n \leq s$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \frac{\lambda^n}{1\cdot\mu\cdot2\cdot\mu\cdots n\cdot\mu} = \frac{\rho^n}{n!}$$

– pentru $n > s$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \frac{\lambda^n}{1 \cdot \mu \cdot 2 \cdot \mu \cdots s \cdot \mu \cdot s \cdot \mu \cdots s \cdot \mu} = \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}}.$$

Rezultă

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & 1 \leq n \leq s \\ \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0, & n > s \end{cases}. \tag{4.41}$$

Urmează

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}}\right)^{-1}.$$

Dar

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} = \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{s}\right)^n = \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{s+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{s}\right)^n =$$
$$= \frac{\rho^{s+1}}{s! s} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{s}} = \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}.$$

Deci

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}\right)^{-1} \tag{4.42}$$

Urmează

$$\overline{n}_f = 0 \cdot (p_0 + \ldots + p_s) + \sum_{k=1}^{\infty} k p_{s+k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^{s+k}}{s! s^k} p_0 = \frac{\rho^s}{s!} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{s}\right)^k =$$
$$= \frac{\rho^s}{s!} p_0 \frac{\rho}{s} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{s}\right)^{k-1} = \frac{\rho^s}{s!} p_0 \frac{\rho}{s} \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{s}\right)^k\right) =$$
$$= \frac{\rho^s}{s!} p_0 \frac{\rho}{s} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{s}}\right) = \frac{\rho^s}{s!} p_0 \frac{\rho}{s} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{s}\right)^2} = \frac{\rho^{s+1} p_0}{(s-1)!(s-\rho)^2} \tag{4.43}$$

$$\overline{n}_s = \sum_{n=0}^{s-1} n p_n + s \sum_{n=s+1}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \frac{\rho^n}{n!} p_0 + s \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0 =$$
$$= p_0 \rho \left[\sum_{n=1}^{s} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{s! s^{n-s-1}}\right] =$$
$$= p_0 \rho \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}}\right] = p_0 \rho \frac{1}{p_0} = \rho \tag{4.44}$$

$$\overline{n} = \overline{n}_f + \overline{n}_s = \frac{\rho^{s+1} p_0}{(s-1)!(s-\rho)^2} + \rho \tag{4.45}$$

$$\overline{t}_f = \frac{\overline{n}_f}{\lambda} = \frac{\rho^{s+1} p_0}{(s-1)!(s-\rho)^2 \lambda} \tag{4.46}$$

$$\overline{t}_s = \frac{\overline{n}_s}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \tag{4.47}$$

$$\overline{t} = \overline{t}_f + \overline{t}_s = \frac{\rho^{s+1} p_0}{(s-1)!(s-\rho)^2 \lambda} + \frac{1}{\mu} \tag{4.48}$$

$$P(t_f > \tau) = p_s \frac{1}{1 - \rho^\star} e^{-(s\mu - \lambda)\tau}. \tag{4.49}$$

Chapter 5

Elemente de teoria jocurilor

Teoria jocurilor îşi propune să studieze comportamentul uman în situaţii conflictuale în care raţiunea se opune raţiunii, fiecare dintre părţile implicate având putere de analiză şi posibilitatea de a lua decizii în vederea atingerii propriului obiectiv.

Teoria jocurilor nu are caracter de teorie a deciziilor optime şi nu oferă concluzii adecvate pentru rezolvarea problemei în favoarea unuia sau altuia dintre participanţi.

Teoria jocurilor poate fi definită ca teoria matematică a modelelor situaţiilor conflictuale. O situaţie conflictuală este caracterizată de două elemente esenţiale:

- caracterul raţional al comportării participanţilor, care sunt persoane fizice sau colectivităţi umane, capabile să-şi stabilească obiective şi să-şi aleagă căile pentru atingerea lor;

- antagonismul intereselor, care reprezintă factorul generator al conflictului.

Interesul care stă la baza conflictului diferă în funcţie de contextul jocului respectiv. El se poate manifesta prin dorinţa de a ocupa o poziţie cât mai bună sau de a provoca cât mai multe pierderi adversarului. Teoria jocurilor exclude problemele de comportament în care se manifestă o convergenţă deplină a intereselor.

În funcţie de elementele esenţiale pe care le definim, jocurile se pot clasifica astfel:

1. În funcţie de numărul de persoane care participă (un joc presupune participarea conştientă a mai multor persoane (colectivităţi umane), *jucătorii*, care au interese diferite:

- jocuri de doi jucători;

- jocuri de $n > 2$ jucători.

2. În funcţie de câştigurile realizate:

- jocuri cu sumă constantă, în care suma câştigurilor tuturor jucătorilor este aceeaşi, indiferent de acţiunile acestora (se pot reduce la jocuri cu sumă nulă printr-o schimbare a reperelor faţă de care se calculează câştigurile);

- jocuri cu sumă neconstantă.

3. În funcţie de numărul de posibilităţi de acţiune:

- jocuri finite (cu număr finit de variante);

- jocuri infinite.

4. În funcţie de comunicarea cu adversarul:

- jocuri cooperative, în care sunt permise diferite forme de comunicare şi colaborare;

- jocuri necooperative, în care fiecare jucător acţionează fără a cunoaşte planurile celorlalţi.

5.1 Jocuri în formă extinsă

Definiţia 5.1.1 *Un joc finit de n ($n \geq 2$) jucători,* **în formă extinsă** Γ *este definit de următoarele componente esenţiale:*

1. Un arbore (Ω, Γ) *numit* **arborele jocului**; Ω *este mulţimea nodurilor, iar* Γ *este mulţimea arcelor. Mulţimea nodurilor finale, numite* **partide**, *este notată cu*

$$P = \{p \in \Omega \,|\, \Gamma(p) = \emptyset\}.$$

Mulţimea nodurilor care nu sunt partide, numite **poziţii**, *este notată cu*

$$W = \Omega \setminus P = \{w \in \Omega \,|\, \Gamma(w) \neq \emptyset\}.$$

Nodul iniţial w_0, *care are proprietatea*

$$\nexists w \in \Omega, w_0 \in \Gamma(w),$$

este numit **poziţia iniţială** *a jocului.*

Pentru fiecare $w \in W$, *mulţimea arcelor care pleacă din* w

$$\{(w, w') \,|\, w' \in \Gamma(w)\}$$

este numită **mulţimea alternativelor la poziţia** w.

Dacă $w' \in \Gamma(w)$, *atunci* w' *se numaşte* **succesor imediat** *al lui* w, *iar* w *se numeşte* **predecesor imediat** *al lui* w'. *Pentru orice* $w \in \Omega$ *există un unic lanţ care îl leagă de* w_0.

2. O partiţie $R = \{R_0, R_1, \ldots, R_q\}$ *a lui* Ω, *unde* $R_0 = \{w_0\}$, $R_q = P$, *iar* R_k, $(k = \overline{1, q-1})$, *este formată din poziţiile legate de* w_0 *printr-un lanţ format din k arce (mulţime de nivel k), adică*

$$R_k = \{w \in \Omega \,|\, \exists w_1, w_2, \ldots, w_{k-1} \in \Omega, w_1 = \Gamma(w_0), w_2 = \Gamma(w_1), \ldots, w = \Gamma(w_{k-1})\},$$

se numeşte **partiţie a nivelelor**.

Numărul natural q reprezintă numărul de mutări ale jocului şi este numit **lungimea jocului**.

3. O partiţie $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ *a mulţimii* W, *unde* J_i *este mulţimea poziţiilor în care acţionează jucătorul* i, $i = \overline{1, n}$, *se numeşte* **partiţie a jucătorilor**.

4. Pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$ *există o partiţie* $S_i = \{S_i^1, S_i^2, \ldots, S_i^{k_i}\}$ *a lui* J_i *numită* **partiţia informaţională a jucătorului** i.

5. Funcţiile $F_i : P \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, *unde* $F_i(p)$ *reprezintă câştigul jucătorului i în cazul în care evoluţia jocului este cea descrisă de lanţul care leagă* w_0 *de* p, *se numesc funcţii de câştig ale jucătorilor.*

Definiţia 5.1.2 *Un plan de acţiune propriu al unui jucător, care vizează întreaga desfăşurare a conflictului, se numeşte* **strategie personală**. *Strategia defineşte mutările pe care jucătorul este pregătit să le efectueze pentru fiecare poziţie personală în parte.*

Definiţia 5.1.3 *O mulţime de poziţii în care jucătorul deţine aceeaşi informaţie asupra desfăşurării trecute a jocului, poziţii pe care el nu le poate distinge una de alta, se numeşte* **mulţime informaţională**.

În cadrul unui joc, jucătorul este confruntat cu problema fixării unui obiectiv propriu şi a stabilirii unei căi de realizare a acestuia. Problema poate fi rezolvată dacă jucătorul cunoaşte toate modurile în care, atât el cât şi adversarii săi, pot acţiona pe parcursul întregului joc.

Definiţia 5.1.4 *O* **strategie a jocului** Γ *este un n-uplu* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de strategii personale ale celor n jucători.*

Notăm cu X_i mulţimea tuturor strategiilor personale ale jucătorului i, $i = \overline{1, n}$, şi cu X mulţimea strategiilor jocului. Atunci $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Jocul este finit dacă mulţimea strategiilor este finită.

Definiţia 5.1.5 *O strategie* $\overline{x} \in X$ *se numeşte* **punct de echilibru** *al jocului* Γ *dacă*

$$F_i(\overline{x}) \geq F_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n), \forall x_i \in X_i, \forall i \in \overline{1, n}.$$

Obiectivul fiecărui jucător este maximizarea propriului câştig. Ţinând cont de faptul că interesele celor n jucători sunt diferite, deducem că este imposibil ca la finalul jocului să se realizeze obiectivele tuturor jucătorilor.

Punctul de echilibru desemnează o situaţie de la care nici un jucător nu se poate abate fără a pierde. În cazul jocurilor necooperative, punctul de echilibru oferă o modalitate echitabilă de rezolvare a conflictului, care să nu avantajeze sau să dezavantajeze niciunul dintre jucători. În cazul jocurilor cooperative, punctul de echilibru îşi pierde această semnificaţie; el are totuşi o mare importanţă în calculele pe care şi le face fiecare jucător în parte pentru analiza avantajelor şi dezavantajelor unei eventuale cooperări. Problema punctului de echilibru constituie una din problemele fundamentale ale teoriei jocurilor.

5.2 Jocuri de doi jucători, cu sumă nulă

Definiţia 5.2.1 *Un joc de doi jucători, cu sumă nulă, în formă normală, este definit de tripletul* (X, Y, F)*, unde* X *şi* Y *sunt două mulţimi nevide, numite* **mulţimile strategiilor personale** *ale celor doi jucători, iar* F *este o funcţie cu valori reale definită pe produsul cartezian* $X \times Y$*, numită* **funcţia de câştig a jocului** *(sau* funcţia de câştig a primului jucător*).*

Orice element $x \in X$ reprezintă o strategie personală a primului jucător (notat în continuare cu A, iar $y \in Y$ o strategie a celui de-al doilea jucător, B. $F(x, y)$ este valoarea câştigului primului jucător, corespunzător strategiei (x, y). Deoarece jocul este cu sumă nulă, câştigul celui de-al doilea jucător este definit de funcţia $-F$.

În cazul jocului de doi jucători, cu sumă nulă, $\Gamma = (X, Y, F)$, o strategie a jocului, $(\overline{x}, \overline{y})$, este punct de echilibru dacă sunt îndeplinite condiţiile

$$F(\overline{x}, \overline{y}) \geq F(x, \overline{y}), \quad \forall x \in X \text{ şi}$$

$$-F(\overline{x}, \overline{y}) \geq -F(\overline{x}, y), \quad \forall y \in Y,$$

ceea ce este echivalent cu dubla inegalitate

$$F(x, \overline{y}) \leq F(\overline{x}, \overline{y}) \leq F(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Deci, un punct de echilibru al jocului Γ este un punct şa al funcţiei de câştig F.

Semnificaţia acestui concept ne ajută să răspundem la întrebarea: "ce înseamnă o comportare optimă a ambilor jucători în jocul Γ?". Mai întâi analizăm jucătorul A. Datorită caracterului antagonist al jocului, alegând o strategie personală $\overline{x} \in X$, A nu poate fi sigur "apriori" decât de un câştig egal cu

$$\min_{y \in Y} F(\overline{x}, y).$$

O comportare optimă a sa se reflectă în alegerea acelei strategii $\overline{x} \in X$ care poate sa-i garanteze maximul dintre căştigurile precedente, putând astfel conta pe

$$v_1 = \min_{y \in Y} F(\overline{x}, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y).$$

Se ajunge astfel la **principiul max-min** care reprezintă, în teoria jocurilor de doi jucători, cu sumă nulă, criteriul raţional de comportare optimă a unui jucător: "*căutând să pună de acord dorinţa de maximizare a câştigului său cu politica de prudenţă dictată de teama faţă de acţiunile posibile ale adversarului, jucătorul alege strategia care îi asigură cel mai mare câştig dintre câştigurile minime oferite de alegerile oponentului său*".

Repetând raţionamentul anterior din punctul de vedere al jucătorului B, ajungem la concluzia că principiul max-min îl conduce la adoptarea unei strategii $\overline{y} \in Y$ care să-i garanteze un câştig de cel puţin

$$-v_2 = \min_{x \in X}(-F(x, \overline{y})) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X}(-F(x, y)) = -\min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y),$$

caz în care câştigul primului jucător va fi cel mult

$$v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y).$$

Astfel au fost puse în evidenţă două mărimi definitorii ale jocului, v_1 şi v_2, numite **valoarea max-min** respectiv **valoarea min-max**.

Propoziţia 5.2.1 *Între valorile max-min şi min-max există relaţia* $v_1 \leq v_2$, *adică*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y).$$

Demonstraţie. Evident, oricare ar fi strategiile $x \in X$ şi $y \in Y$, avem

$$\min_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y) \leq \max_{x \in X} F(x, y).$$

Deoarece x este arbitrar în X, rezultă

$$v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \leq \max_{x \in X} F(x, y), \quad \forall y \in Y$$

şi, cum membrul stăng al inegalităţii nu depinde de y, putem scrie

$$v_1 \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = v_2. \blacksquare$$

Propoziţia 5.2.2 *Dacă* $v_1 = v_2 = v$, *atunci există* $\overline{x} \in X$ *şi* $\overline{y} \in Y$ *astfel încât*

$$F(x, \overline{y}) \leq v \leq F(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

şi $v = F(\overline{x}, \overline{y})$.

Demonstraţie. Fie $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ două strategii max-min ale celor doi jucători. Atunci

$$\max_{x \in X} F(x, \overline{y}) = v_2 = v = v_1 = \min_{y \in Y} F(\overline{x}, y).$$

Dar, pentru două strategii arbitrare $x \in X$ şi $y \in Y$, putem scrie

$$F(x, \overline{y}) \leq \max_{x \in X} F(x, \overline{y}) \tag{5.1}$$

şi

$$F(\overline{x}, y) \geq \min_{y \in Y} F(\overline{x}, y). \tag{5.2}$$

Obţinem

$$F(x, \overline{y}) \leq v \leq F(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

În particular, pentru $x = \overline{x}$, din (5.1), deducem $F(\overline{x}, \overline{y}) \leq v$. Analog, din (5.2), pentru $y = \overline{y}$, $F(\overline{x}, \overline{y}) \geq v$.

Prin urmare $F(\overline{x}, \overline{y}) = v$. $\blacksquare$

Observaţia 5.2.1 *Dacă* $v_1 = v_2 = v$, *atunci* v *se numeşte* valoarea jocului.

Propoziţia 5.2.3 *Dacă există strategiile* $\overline{x} \in X$ *şi* $\overline{y} \in Y$ *şi numărul real* v *astfel încât*

$$F(x, \overline{y}) \leq v \leq F(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y,$$

atunci $v_1 = v_2 = v$.

Demonstraţie. Din $F(x, \overline{y}) \leq v$ rezultă

$$\max_{x \in X} F(x, \overline{y}) \leq v,$$

deci

$$v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) \leq v.$$

Analog, din $F(\overline{x}, y) \geq v$, deducem

$$\min_{y \in Y} F(\overline{x}, y) \geq v$$

şi

$$v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \geq v.$$

Deci $v_2 \leq v \leq v_1$. Din Propoziţia 5.2.1 avem $v_1 \leq v_2$, prin urmare $v_1 = v_2 = v$. ■

Corolarul 5.2.1 *O condiţie necesară şi suficientă ca*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) \tag{5.3}$$

este ca funcţia F să admită punct de echilibru (punct şa).

Dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este punct de echilibru al lui F, atunci $F(\overline{x}, \overline{y}) = v$, unde v este valoarea comună a celor doi membri ai egalităţii (5.3).

De aici deducem că punctul de echilibru al unui joc de doi jucători, cu sumă nulă, este format din strategii max-min.

Definiţia 5.2.2 *Dacă jocul $\Gamma = (X, Y, F)$ admite puncte de echilibru (adică dacă este verificată relaţia (5.3)), numim* **soluţie** *a sa mulţimea E a tuturor punctelor de echilibru.*

Propoziţia 5.2.4 *Dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ şi $(\hat{x}, \hat{y})$ sunt puncte de echilibru diferite ale jocului Γ, atunci $(\overline{x}, \hat{y})$ şi $(\hat{x}, \overline{y})$ sunt, de asemenea, puncte de echilibru.*

Demonstraţie. Deoarece $(\overline{x}, \overline{y}) \in E$, conform definiţiei punctului de echilibru, avem

$$F(x, \overline{y}) \leq F(\overline{x}, \overline{y}) \leq F(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \tag{5.4}$$

Pentru $y = \hat{y}$, a doua inegalitate din (5.4) devine $F(\overline{x}, \overline{y}) \leq F(\overline{x}, \hat{y})$.

Folosind definiţia punctului de echilibru pentru punctul $(\hat{x}, \hat{y})$ obţinem

$$F(x, \hat{y}) \leq F(\hat{x}, \hat{y}) \leq F(\hat{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \tag{5.5}$$

Pentru $x = \overline{x}$, prima inegalitate din (5.5) devine $F(\overline{x}, \hat{y}) \leq F(\hat{x}, \hat{y})$.

Dar $F(\overline{x}, \overline{y}) = F(\hat{x}, \hat{y}) = v$ deoarece $(\overline{x}, \overline{y})$ şi $(\hat{x}, \hat{y})$ sunt puncte de echilibru. Urmează

$$F(\overline{x}, \hat{y}) = v = F(\overline{x}, \overline{y}) = F(\hat{x}, \hat{y}).$$

Înlocuind în prima inegalitate din (5.4) pe $F(\overline{x}, \overline{y})$ cu $F(\overline{x}, \hat{y})$ şi în a doua inegalitate din (5.5) pe $F(\hat{x}, \hat{y})$ cu $F(\overline{x}, \hat{y})$, obţinem

$$F(x, \hat{y}) \leq F(\overline{x}, \hat{y}) \leq F(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y,$$

adică $(\overline{x}, \hat{y}) \in E$. Analog se demonstrează că $(\hat{x}, \overline{y}) \in E$. ■

Definiţia 5.2.3 *Dacă jocul Γ admite puncte de echilibru, numim* **strategie optimă a primului jucător** *o strategie $\overline{x} \in X$ pentru care există o strategie $\overline{y} \in Y$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in E$.*

Dacă notăm cu O_1 mulţimea strategiilor optime ale primului jucător şi cu O_2 mulţimea strategiilor optime ale celui de-al doilea jucător, atunci $E = O_1 \times O_2$.

Propoziţia 5.2.5 *Considerăm jocurile $\Gamma = (X, Y, F)$ şi $\Gamma' = (X, Y, F')$ pentru care $F'(x, y) = F(x, y) + a$, unde a este o constantă reală.*

Atunci soluţiile celor două jocuri coincid. Dacă v este valoarea jocului Γ, atunci valoarea jocului Γ' va fi $v' = v + a$.

Demonstraţie. Presupunem că soluţia jocului Γ este E şi fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in E$. Atunci

$$F(x, \overline{y}) \leq F(\overline{x}, \overline{y}) \leq F(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Adunând constanta a la cei trei membri ai relaţiei precedente obţinem

$$F'(x, \overline{y}) \leq F'(\overline{x}, \overline{y}) \leq F'(\overline{x}, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y,$$

cu $F'(\overline{x}, \overline{y}) = F(\overline{x}, \overline{y}) + a = v + a$, ceea ce dovedeşte că $\overline{x}, \overline{y})$ este punct de echilibru al jocului Γ' şi că $v + a$ este valoarea lui.

Reciproc, dacă $\overline{x}, \overline{y})$ este punct de echilibru al jocului Γ', înlocuind în raţionamentele anterioare pe a cu $-a$, ajungem la concluzia că $(\overline{x}, \overline{y})$ este punct de echilibru şi pentru jocul Γ. ∎