Metode Numerice în Ingineria Electrică

Problemă: *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} 12x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & -10x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +15x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Să se rezolve folosind metoda bazată pe Regula lui Cramer. Soluţia se va determina cu o precizie mai bună de 10^{-6}.

Soluţie: Considerăm sistemul pătratic de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1}$$

cu $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i, j \in \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Dacă determinantul matricei sistemului (1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

este nenul, atunci sistemul (1) este de tip Cramer, deci este compatibil determinat. Îl rezolvăm cu metoda bazată pe cegula lui Cramer.

Prin urmare, pentru fiecare $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, calculăm determinantul

$$\Delta_{x_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

care se obţine din determinantul Δ înlocuind coloana j cu coloana termenilor liberi.

În final obţinem soluţia

$$x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Aplicăm metoda pentru sistemul din enunţul problemei

$$\begin{cases} 12x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & -10x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +15x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & 2 \\ 2 & -3 & 15 \end{vmatrix} = -1678 \neq 0.$$

Calculăm

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & -10 & 2 \\ 3 & -3 & 15 \end{vmatrix} = -660,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 15 \end{vmatrix} = -682,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 5 \\ -1 & -10 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -384.$$

Obţinem soluţia

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{-660}{-1678} & \approx & 0.393325387 \\ x_2 & = & \frac{-682}{-1678} & \approx & 0.406436234 \\ x_3 & = & \frac{-384}{-1678} & \approx & 0.228843862 \end{cases}.$$

Împărţirile au fost calculate cu 9 zecimale (rotunjire la cea de-a 9-a zecimală), deci eroarea este mai mică de 10^{-9}, prin urmare precizia este mai bună de 10^{-6}.