

Capitolul 2

Strategii didactice utilizate în procesul de predare-învățare-evaluare la matematică

2.1 Metode didactice specifice matematicii și metode de învățare centrate pe elev

Nu ne propunem o prezentare detaliată a strategiilor didactice, deoarece problematica este destul de complexă, iar abordarea noastră vizează în mod deosebit metodele, formele de organizare și mijloacele de învățământ folosite în predarea-învățarea matematicii.

Plecând de la una din cerințele majore ale învățământului modern, aceea de formare a deprinderilor de studiu individual la elevi, ce fructifică capacitatea de a gândi și acționa liber și creativ, trebuie ca predarea-învățarea să se realizeze prin utilizarea celor mai adecvate metode, procedee și mijloace didactice care să stimuleze gândirea și trăirile elevului.

Pentru ca demersul profesorului și elevilor să aibă rezultat pozitiv, este necesară adoptarea unei strategii de acțiune cât mai adecvată obiectivelor propuse și specificului conținuturilor matematice însușite.

Remarcăm faptul că la nivelul practicii predării, strategia didactică reprezintă o anumită structură metodică decompozabilă într-o suită de decizii și evenimente, cu privire la ceea ce întreprinde profesorul și la

ceea ce întreprind elevii într-o situație instructiv-educativă dată.

Adoptarea unei strategii este dependentă de capacitatea cadrului didactic de a acționa eficient în realizarea obiectivelor propuse, ceea ce presupune nu numai competența de specialitate, ci și competența pedagogică și metodică din partea profesorului.

De aceea, înainte de a dezvolta problematica metodelor didactice de predare-învățare specifice matematicii, vom detalia o serie de definiții date termenilor de strategie didactică, metodă didactică, procedeu didactic și mijloc de învățământ.

Prin strategia didactică, înțelegem un sistem complex de înlănțuire a metodelor, a procedeelor, a formelor de organizare și a mijloacelor de învățământ care vizează atingerea unor obiective.

Strategiile didactice (cf. [13], pag. 282) *sunt demersuri acționale și operaționale flexibile, coordonate și racordate la obiective și situații prin care se creează condițiile predării și generării învățării, a schimbărilor de atitudine și de conduită în contexte didactice diverse, particulare.*

Strategia didactică ocupă un loc central în cadrul activității didactice, deoarece proiectarea și organizarea demersului didactic se realizează în funcție de decizia strategică a profesorului, de obiectivele și metodele vizate și prefigurează traseul metodic pentru abordarea unei situații concrete de predare-învățare.

În sistemul educațional, cele mai frecvente tipuri de strategii didactice sunt:

- *strategii inductive* – sunt strategiile didactice al căror demers didactic este de la particular la general;
- *strategii deductive* – sunt strategiile didactice al căror demers didactic pleacă de la general la particular;
- *strategii analogice* – sunt strategiile didactice în care predarea și învățarea se desfășoară cu ajutorul modelelor;
- *strategii mixte* – sunt strategiile didactice inductiv-deductive și deductiv-inductive;
- *strategii algoritmice* – sunt strategiile didactice explicativ-demonstrative, intuitive, expositive, imitative, programate și algoritmice propriu-zise;

- *strategii euristice* – sunt strategiile didactice unde elaborarea cunoștințelor se face prin efort propriu de gândire, folosind problematizarea, descoperirea, modelarea, formularea de ipoteze, dialogul euristic, experimentul de investigare, asaltul de idei, având ca efect stimularea creativității.

Strategiile didactice sunt realizate cu ajutorul metodelor de predare-învățare, însă, nu le putem confunda, deoarece, metoda vizează o activitate de predare-învățare-evaluare și strategia vizează procesul de instruire în ansamblu și nu o secvență de instruire.

Metoda, ca semnificație, vine de la cuvântul grecesc "methodos" care înseamnă "cale către", adică, calea de urmat în vederea descoperirii adevărului sau drumul de parcurs în vederea atingerii unui scop.

Într-o versiune modernă (cf. [6], pag. 18), *metoda este interpretată drept o modalitate pe care profesorul o urmează pentru a-i face pe elevi să gândească singuri calea proprie de urmat în redescoperirea adevărilor sale, în găsirea soluțiilor necesare la rezolvarea problemelor teoretice și practice cu care ei se confruntă în procesul învățării.*

Prin metodă didactică, înțelegem, acea cale prin intermediul căreia elevii dobândesc cunoștințe, deprinderi, își dezvoltă capacitățile intelectuale și își valorifică aptitudinile specifice, în cadrul procesului de instruire, sub directă coordonare a cadrelor didactice.

Din punct de vedere al planului de acțiune (cf. [19], pag. 126), *metoda didactică este o succesiune de operații realizate în vederea atingerii unui scop, un instrument de lucru în activitatea de cunoaștere, de formare și dezvoltare a abilităților.*

Metodele didactice sunt demersuri teoretico-acționale de predare-învățare, care asigură derularea și finalizarea eficientă a procesului instructiv-educativ, contribuie la dezvoltarea teoriei și practicii pedagogice, contribuie la realizarea obiectivelor didactice și sunt eficiente atunci când profesorul le combină și folosește creator.

După Cerghit, (cf. [6], pag. 101-109), avem următoarea clasificare a metodelor de învățământ, clasificare făcută după două criterii: *natura obiectivelor pedagogice concrete și conținutul instruirii.*

După aceste criterii, în didactica modernă există patru categorii de metode și anume:

1. Metode de transmitere și însușire a cunoștințelor

a) *Metode de comunicare orală:*

Expozitive: Expunerea cu formele ei: explicația, prelegerea și povestirea;

Dialogate (conversative): Conversația, dezbateră tip seminar, problematizarea, brainstormingul, (Phillips 6-6), metoda cubului și comunicarea rotativă;

b) *Metode de comunicare scrisă (munca cu manualul):*

Lectura explicativă și lectura independentă.

2. Metode de explorare și descoperire:

a) *Metode de explorare directă a obiectelor și fenomenelor:* observația didactică, cercetarea documentelor, experimentul, studiul de caz și învățarea prin descoperire.

b) *Metode de explorare indirectă,* prin substitutele realității: demonstrația, modelarea și algoritmizarea.

3. Metode bazate pe acțiune practică (de formare a deprinderilor)

a) *Metode active:* lucrări practice de laborator, exercițiul didactic, studiul de caz, proiectul didactic, brainstorming-ul, mozaicul și organizatorul grafic.

b) *Metode stimulative:* jocul de rol, modelarea, simularea, dramatizarea și învățarea pe simulatoare.

4. Metode de raționalizare: instruirea programată și instruirea asistată de calculator

Procedeul didactic, (cf. [13], pag. 287) *reprezintă o secvență a metodei, un simplu detaliu, o tehnică mai limitată de acțiune, o componentă sau chiar o particularizare a metodei.*

De aceea, procedeele didactice reprezintă operațiile subordonate acțiunii declanșate la nivelul metodei de instruire propusă de profesor și adoptată de elev și includ tehnici concrete de acțiune în diferite condiții și situații didactice.

Mijloacele de învățământ (cf. [13], pag. 300) *sunt instrumente sau complexe instrumentale menite a facilita transmiterea unor cunoștințe, formarea unor deprinderi, evaluarea unor achiziții, realizarea unor aplicații practice în cadrul procesului instructiv-educativ.*

Mijlocul de învățământ, este instrument material, natural și informațional selectat și adoptat la nivelul metodelor și al procedeelelor de instruire folosite pentru realizarea sarcinilor proiectate la nivelul activității de predare-învățare-evaluare.

Privitor la metodologia activă, centrată pe elev, putem spune că aceasta implică elevul în procesul de învățare și îl învață aptitudinile învățării, precum și aptitudinile fundamentale ale muncii și ale rezolvării de probleme.

Metodele centrate pe elev, îl implică în evaluarea eficacității procesului de învățare și în stabilirea obiectivelor pentru dezvoltarea viitoare.

Metodele de învățare centrate pe elev pun accentul pe persoana care învață, unde procesul de predare nu este decât unul dintre instrumentele care pot fi utilizate pentru a-i ajuta pe elevi să învețe și rolul profesorului este acela de a administra procesul de învățare al elevilor pe care îi are în grijă.

Prin folosirea acestor metode, profesorii trebuie să încurajeze și să faciliteze implicarea activă a elevilor în planificarea și administrarea propriului lor proces de învățare prin proiectarea structurată a oportunităților de învățare atât în sala de clasă, cât și în afara ei.

Dintre metodele, procedeele și tehnicile de învățare centrate pe elev, amintim:

- brainstorming;
- știu - vreau să știu - am învățat;
- jurnalul cu dublă intrare;
- sinelg;
- ciorchinele;
- turul galeriei;
- cubul;
- bulgărele de zăpadă;
- mozaicul;
- discuția și organizatorul grafic.

Toate metodele prezentate, sunt modalități de acțiune cu ajutorul cărora elevii, sub îndrumarea cadrului didactic, dobândesc cunoștințe, priceperi, deprinderi și își formează aptitudini și operații mintale.

La matematică, datorită complexității conținuturilor matematice, trebuie să alegem judicios metodele, deoarece metoda aleasă, influențează în mare măsură abordarea cunoștințelor și modul de formare al deprinderilor.

Privitor la conținutul matematicii, metodele folosite trebuie să o prezinte ca o disciplină unitară prin prezența unor concepte cheie generale și a unor structuri fundamentale.

De asemenea, învățarea matematicii trebuie înțeleasă atât ca o matematică conceptuală cât și ca o tehnică de calcul folositoare.

Prin metodele și procedeele didactice trebuie să-i facem pe elevi să înțeleagă și să cunoască metodologia proprie activității matematice, adică să-i învățăm să cunoască posibilitățile și limitele procesului de matematizare.

Și nu în ultimul rând, prin metodologia aleasă, să existe o permanentă preocupare pentru dezvoltarea la elevi a motivației și a unei atitudini pozitive față de matematică.

Chiar dacă toate metodele prezentate în clasificarea de mai înainte, le regăsim în procesul de predare-învățare a matematicii, ne vom ocupa de cele mai importante, prezentând și o serie de aspecte practic-aplicative.

1. Metode de transmitere și însușire a cunoștințelor

a) Expunerea didactică, este metoda de predare tradițională, expoziitivă, care constă în prezentarea verbală a unui volum de informații, date de cadrul didactic către elevi, în concordanță cu prevederile programei de matematică.

Metoda expunerii didactice (cf. [13], pag. 292), *constituie o cale simplă, directă și rapidă de transmitere de cunoștințe.*

Expunerea (cf. [14], pag. 55) *este o metodă prin intermediul căreia este prezentat un anumit conținut de idei, pe o anumită temă, într-o manieră orală.*

Expunerea are o pondere relativ redusă în predarea matematicii, iar atunci când o folosim ea trebuie să se limiteze la scurte explicații.

Expunerea didactică îmbracă următoarele trei forme:

- explicația – este forma expunerii în care predomina argumentarea rațională, făcându-și loc deja problemele de lămurit, teoremele, regulile, legile științifice.

- povestirea – este forma expunerii ce prezintă informația sub forma descriptivă sau narativă, respectând ordonarea în timp sau în spațiu a obiectelor, fenomenelor și evenimentelor.
- prelegerea școlară – este forma expunerii în cadrul căreia informația este prezentată ca o succesiune de idei, teorii, interpretări de fapte separate, în scopul unificării lor într-un tot.

Aceste trei forme se folosesc în predarea matematicii atunci când profesorul trebuie să facă o prezentare orală și sistematică a cunoștințelor, dar, cea mai utilizată este însă explicația.

Explicația, constă în expunerea logică și argumentată a unor probleme teoretice, reguli și teoreme.

Astfel, profesorul își expune logic modul propriu de gândire, iar elevii urmăresc întregul parcurs și încearcă să înțeleagă tot ceea ce este prezentat.

Metoda explicației (cf. [14], pag. 59) *este folosită, cu deosebire, în predarea disciplinelor științifice sau oriunde este nevoie de prezentarea unor fapte clare și bine ierarhizate, ca atare și în predarea matematicii.*

Pentru ca explicația să fie corespunzătoare, trebuie ca întreaga prezentare să fie gândită din prisma modului de înțelegere al elevilor și a posibilităților lor de gândire.

Profesorul trebuie să controleze modul cum este urmărit de elevi prin observarea mimicii și trebuie să intervină atunci când argumentarea nu este corectă.

Explicația o întâlnim în următoarele situații:

- pentru înțelegerea noțiunilor matematice noi;
- pentru înțelegerea raționamentului matematic ce conduce la demonstrarea unei teoreme;
- pentru explicarea proprietăților figurilor geometrice.

Explicațiile trebuie să fie clare și concise, iar argumentările în cazul raționamentelor trebuie să fie riguroase, bazate pe exemple din care să reiasă cauza care determină fenomenul.

Dacă la clasele gimnaziale explicația o folosim mai rar, la clasele liceale întâlnim mai multe ocazii: definirea logaritmilor, definirea determinantilor, definirea derivatei, introducerea structurilor algebrice, definirea integralei etc.

Prelegerea se folosește în ultimele clase liceale, fiind forma de expunere riguroasă științifică cu o durată mult mai lungă, are o continuitate mult mai mare în prezentarea unui fenomen matematic și reușește să antreneze atenția elevilor.

Uneori în prezentarea unor fapte matematice este nevoie de introducerea anumitor elemente de istoria matematicii cum ar fi: date biografice, probleme celebre, amuzamente, descoperiri celebre etc., motiv pentru care recurgem la povestire și prin intermediul căreia reușim să trezim interesul elevilor.

Însă, (cf. [14], pag. 58) în prelegere, *șansele atragerii și captării interesului publicului față de conținutul prezentat, depind de abilitățile oratorice ale vorbitorului.*

Povestirea se folosește rar, dar atunci când o utilizăm, trebuie ca materialul prezentat să aibă legătură cu faptul matematic și să creeze un climat favorabil asimilării lui.

Este foarte bine folosită în istoria matematicii și chiar dacă este o metodă pasivă, atunci când profesorul este un bun povestitor și stimulează o receptivitate deosebită, devine o metodă activă.

b) Conversația didactică, este metoda prin care profesorul cu ajutorul întrebărilor stimulează gândirea elevilor în vederea însușirii unor cunoștințe noi, fixează și sistematizează cunoștințele asimilate anterior.

Este una dintre metodele cele mai folosite în predarea matematicii și se utilizează în toate etapele demersului didactic.

Folosirea acestei metode pune în evidență caracterul formativ al învățământului și contribuie la formarea raționamentului matematic la elevi.

Există mai multe criterii după care putem clasifica formele de conversație:

– după persoana căreia i se adresează întrebarea:

- conversație individuală;
- conversație frontală.

– după felul întrebării:

- conversație catihetică;
- conversație euristică.

– după scopul urmărit în desfășurarea demersului didactic:

- conversație introductivă;
- conversație pentru însușirea de noi cunoștințe;
- conversație pentru fixarea cunoștințelor;
- conversație pentru recapitularea cunoștințelor;
- conversație pentru verificarea cunoștințelor.

Instrumentul de lucru al metodei conversației este întrebarea, iar tehnica de folosire a ei trebuie foarte bine stăpînită de profesor și perfecționată continuu.

Conversația individuală este cea realizată de profesor cu un singur elev și se folosește cu scopul verificării cunoștințelor elevului și cu scopul predării unor cunoștințe matematice, mai ales atunci când elevul este scos la tablă.

Conversația frontală este folosită de profesor atunci când întrebările sunt adresate întregii clase și are ca scop pregătirea părții teoretice necesară noii teme, recapitularea teoriei la lecțiile de recapitulare și analiza unor exerciții complexe pentru intuirea planului de rezolvare.

Conversația catihetică, care se folosește destul de rar, o întâlnim la reproducerea unor formule matematice, întrebările se adresează memoriei și elevul trebuie să reproducă din memorie anumite adevăruri matematice.

Conversația euristică se folosește în toate etapele demersului didactic și este forma conversației cu cea mai mare pondere în procesul de predare a matematicii.

Conversația euristică, este acea modalitate de lucru unde elevii, îndrumați și stimulați de profesor prin întrebări bine alese, participă cu toate forțele la descoperirea unor noi adevăruri.

În acest sens (cf. [6], pag. 139), *întregul mecanism al desfășurării acestui tip de conversație se întemeiază pe o succesiune de întrebări cu abilitate puse de către profesor, în alternanță cu răspunsurile elevilor și care conduc, până la urmă, spre realizarea unui nou salt pe calea cunoașterii.*

Astfel, elevul călăuzit de întrebări și bazat pe cunoștințele anterioare la care se adaugă experiența sa de învățare, va putea să sesizeze singur

relațiile cauzale, caracteristicile și esența lucrurilor, fenomenelor matematice și, pe aceasta bază, în final, va putea să formuleze logic o regulă, să elaboreze o definiție și să formuleze concluzii logice.

Această formă a conversației se pregătește cu mare atenție de către profesor, adoptând o strategie euristică, unde întrebările adresate trebuie să aibă o anumită succesiune și să respecte logica matematicii, adică, să plece de la simplu la complex, de la particular la general și de la ușor la greu.

Formularea întrebărilor necesită o deosebită pregătire, o măiestrie pedagogică și succesul utilizării lor depinde de respectarea următoarelor condiții:

- întrebările se aleg și se formulează cu grijă, fără improvizatii;
- întrebările trebuie gradate ca dificultate și exprimate în așa fel încât elevul să le înțeleagă;
- întrebările se formulează corect, dar și concis;
- între întrebare și răspuns se lasă suficient timp de gândire și elaborare;
- atunci când răspunde, elevul nu trebuie întrerupt, pentru a se evita inhibarea, cu excepția unui răspuns care este în afara întrebării;
- dacă este necesar, se adresează întrebări ajutătoare, pentru a facilita înțelegerea, elaborarea răspunsului, corectarea răspunsurilor greșite;
- nu se pun întrebări voit greșite sau încuietoare, deoarece acestea pot bloca sau induce în eroare elevii.

Răspunsurile elevilor trebuie să fie corecte, complete și precis exprimate, iar dacă unele răspunsuri sunt greșite este bine să se lămurească cauzele acestora.

Un rol deosebit al conversației este dezvoltarea limbajului matematic, deoarece dificultățile lui se repercutează pe planul intelectual și afectiv.

Metoda conversației (cf. [14], pag. 70), *generează o serie de avantaje prin faptul că realizează o întâlnire directă a profesorului cu elevii.*

Astfel o importanță deosebită trebuie să acordăm cuvintelor proprii ale matematicii și pentru aceasta profesorul trebuie ca la introducerea și exersarea lor să le treacă prin următoarele etape:

- prezentarea expresiei matematice și a proprietăților ei;
- prezentarea unor exerciții care fac legătura dintre expresie (cuvânt) și proprietate;
- prezentarea unor exerciții unde expresia este utilizată într-un anumit context;
- fixarea cuvântului prin mai multe aplicații practice.

Un alt fenomen important este crearea confuziei între două realități învecinate (exemplu: mediatoare și mediană). În acest caz, profesorul trebuie să intervină și să-l facă pe elev, prin definirea corectă și prin exerciții practice, să distingă diferențele dintre acestea.

Fenomene deosebite în stăpânirea limbajului matematic întâlnim în rezolvarea problemelor atunci când neînțelegerea textului face imposibilă nu numai rezolvarea propriu-zisă dar și orice încercare de a rezolva.

Pentru aceasta trebuie să acordăm o atenție deosebită traducerii textului problemei în anumite expresii matematice și în acest caz, elevul studiind expresia, o poate traduce în cuvinte.

Tot la fel de importantă este și formarea limbajului matematic scris, adică limbajul dat de notațiile și simbolurile pe care trebuie să le folosim în matematică.

Aceste simboluri trebuie să le exersăm în condiții asemănătoare celor folosite la învățarea expresiilor matematice.

c) Problematizarea, este metoda didactică ce constă în punerea în fața elevului a unor dificultăți create în mod deliberat, prin depășirea cărora, elevul învață ceva nou, prin efortul său propriu.

Problematizarea este considerată, în didactica modernă, una dintre cele mai valoroase metode, deoarece orientează gândirea elevilor spre rezolvarea independentă de probleme.

Problematizarea se poate defini ca organizarea unor situații problemă care solicită elevilor utilizarea și restructurarea unor cunoștințe anterioare în vederea soluționării acestora folosind întreaga experiență și pricepere.

Ca tehnică de instruire, problematizarea (cf. [15], pag. 190) *își găsește utilizarea pretutindeni unde se pot crea situații-problemă care urmează a fi soluționate prin gândire comună și căutare, prin cercetare și descoperirea unor noi adevăruri, a unor noi reguli și invenția unor soluții*

de ordin superior care devin parte integrantă a repertoriului individual de achiziții.

Deci, punctul de pornire îl constituie crearea situației-problemă, care desemnează o situație contradictorie, conflictuală între experiența de cunoaștere anterioară și elementul de noutate cu care se confruntă elevul.

În cursul explorării acestor situații-problemă are loc o clarificare a ideilor, sunt puse în evidență anumite posibilități și se obțin unele rezultate variabile.

De aceea, orice situație-problemă trebuie să aibă următoarele caracteristici:

- să reprezinte o dificultate cognitivă pentru elev, rezolvarea acesteia necesitând un efort real de gândire;
- să trezească interesul elevului, să-l surprindă, să-l uimească, provocându-l să acționeze;
- să orienteze activitatea elevului în direcția rezolvării, aflării soluției de rezolvare și, pe cale de consecință, avansării în cunoaștere;
- rezolvarea nu este posibilă fără activarea cunoștințelor și experiențelor dobândite anterior.

Tensiunea ce se crează între experiența anterioară a elevului și elementul de noutate cu care se confruntă îl va determina să acționeze, să caute și să intuiască soluția de rezolvare a situației problemă.

Orice situație-problemă trebuie să fie semnificativă pentru elev, deoarece, el este cel care trebuie să o rezolve pe baza cunoștințelor matematice disponibile, cu efort propriu și cu îndrumări minime date de profesor.

În modul de exprimare al situațiilor problemă există mai multe situații conflictuale, care cer elevilor o altă alternativă nouă și anume:

- situația când elevului i se cere să aplice în condiții noi, cunoștințele asimilate anterior;
- situația când există diferențe majore între cunoștințele asimilate și cerințele impuse de rezolvarea problemei;
- situația când elevul intră într-o contradicție între modul de rezolvare știut și imposibilitatea aplicării lui în practică;

- situația când elevul este pus să aleagă dintr-un anumit sistem de cunoștințe, uneori chiar incomplet, pe acelea necesare rezolvării situației date.

Exemple de situații problemă:

Problema nr. 1.

În triunghiul ABC , $AB = AC$, $m(\hat{A}) = 20^\circ$. Se consideră $E \in (AB)$ astfel încât $AE = BC$ și $F \in (CB)$ astfel încât $CF = AC$.

Să se determine $m(\widehat{FEC})$.

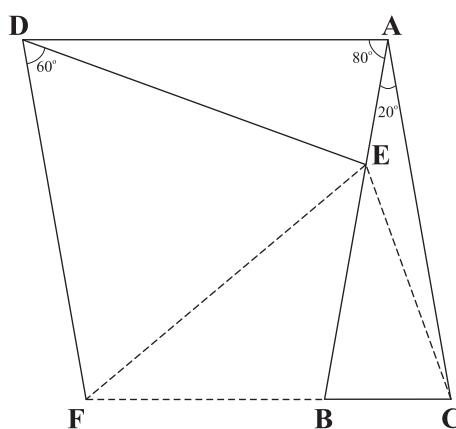


Figura nr. 1.

Atunci când rezolvăm o problemă de geometrie de acest tip, mai întâi facem un breviar teoretic al teoremelor învățate și un moment de creație ce constă în alegerea numai a celor care ne sunt necesare în situația de față. De aceea profesorul are sarcina, ca atunci când întâlnește situații problemă deosebite, să-i dirijeze pe elevi spre noțiunile necesare și spre metodele de lucru care-i ajută în înțelegerea problematicului.

Totodată trebuie să le formeze acea plăcere activă în abordarea problemelor de perspicacitate și a problemelor de creație.

Foarte importantă este construcția corectă a figurii, deoarece putem purta o discuție privitoare asupra congruenței unor segmente sau unghiuri.

În cazul de față dacă eforturile rezolvitorilor nu sunt încununate de succes, pot pur și simplu să arunc o expresie de tipul: ”nu cumva triunghiul CFE este isoscel?”

Trebuie să obișnuim elevii cu acele implicații ascunse și cu abordarea corectă a ipotezei.

Dacă sunt încă la primele abordări de acest tip este bine să mai strecurăm și alte expresii de tipul: "să vedeți după rezolvarea acestei probleme cât de importante sunt construcțiile ajutătoare".

Prima dată elevul se gândește dacă a mai folosit o astfel de metodă și apare miezul activității matematice, adică acea neliniște în abordarea problematicului.

Dacă am construi rombul $ACFD$, implicația ascunsă s-ar putea vizualiza și explicita.

Construcția aceluși romb, ne permite compararea a două triunghiuri congruente

$$\triangle ADE \equiv \triangle CAB \quad \left\{ \begin{array}{l} AD = AC \\ AE = BC \\ \angle DAE \equiv \angle ACB(80^\circ) \end{array} \right. ,$$

de unde $DE = AD$.

Însă $\triangle DEF$ este echilateral ($DE = DF$ și $m(\angle EDF) = 60^\circ$), de unde $DE = DF = FE$.

Atunci, $\triangle CFE$ este isoscel ($FC = FE$) și $m(\angle CFE) = 40^\circ$, de unde,

$$m(\angle FEC) = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Problema nr. 2.

În triunghiul ABC , $m(\hat{B}) = 40^\circ$, $m(\hat{C}) = 30^\circ$ și $D \in (BC)$ astfel încât $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$.

Să se arate că $AB = CD$.

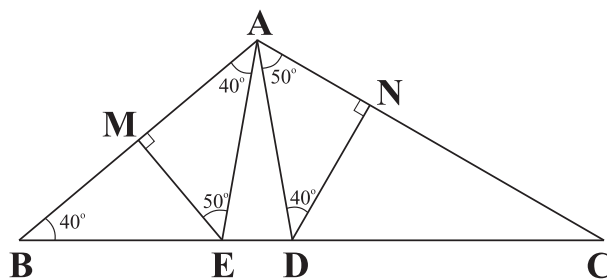


Figura nr. 2.

În cazul de față breviarul teoretic trebuie să vizeze congruența triunghiurilor și teorema unghiului de 30° în triunghiul dreptunghic.

Studierea ipotezei și abordarea ei numai cu teoremele și noțiunile învățate la clasa a VI-a, nu ne permite compararea celor două segmente congruente și în acest caz îi invităm pe elevi să facă eventual o serie de construcții ajutătoare, care poate să simplifice modul de rezolvare.

Acest mod de îndrumare a gândirii elevilor se poate face și pe o perioadă de două sau trei zile, timp în care pot fi încercate mai multe modalități. Atunci, dacă nu sunt elemente de progres în obținerea soluției, putem să dăm o indicație: construirea unghiului $\angle BAE$, ($E \in BC$), $m(\angle BAE) = 40^\circ$.

Din studierea elementelor, $\triangle AEB$ este isoscel,

$$m(\angle EAB) = m(\angle EBA) = 40^\circ,$$

de unde $AE = BE$.

De asemenea, $\triangle AED$ este isoscel, $m(\angle AED) = m(\angle ADE) = 80^\circ$, de unde, $AE = AD$.

Nu este suficientă numai construcția făcută, trebuie să construim $EM \perp AB$, $M \in (AB)$ și $DN \perp AC$, $N \in (AC)$.

Se observă că $\triangle AME \equiv \triangle DNA$ (dreptunghice), $AE = AD$ și $\angle MAE = \angle NDA(40^\circ) \Rightarrow AM = DN$ (1).

Aplicând teorema unghiului de 30° în $\triangle CND$, $DN = \frac{CD}{2}$ (2).

Știind că $AM = \frac{AB}{2}$ (3) și folosind (1), (2), (3) rezultă că

$$\frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = CD.$$

În abordarea situației-problemă și în activitatea exploratorie a elevului pentru a descoperi soluția, pot exista următoarele patru etape fundamentale:

I. Punerea problemei și perceperea ei de către elevi

În această etapă, profesorul descrie situația-problemă, expune faptele, explică relațiile cauzale, recepționează primele solicitări ale elevilor și dă informații suplimentare.

Deci, practic, profesorul dă informații despre începuturile adevărilor lor ce vor fi apoi descoperite de elevi prin efort propriu.

II. Studiarea aprofundată și restructurarea datelor problemei

În această etapă, elevul reactualizează cunoștințele asimilate, se documentează în domeniu, compară informațiile și se oprește la acele informații pe care le consideră necesare și relevante.

III. Căutarea soluțiilor posibile la problema pusă

Acum elevul analizează atent și cu discernământ materialul factual, folosește sinteza, pentru a recupera esențialul și pentru a face conexiuni logice, analizează condițiile de manifestare a fenomenului sau situației și formulează ipoteze privind soluționarea problemei, pe care apoi le verifică.

IV. Obținerea rezultatului final și evaluarea acestuia

În această ultimă etapă, elevul compară rezultatele obținute prin rezolvarea fiecărei ipoteze și alege soluția optimă, pe care o confruntă cu cunoștințele asimilate.

Totuși aplicarea metodei problematizării presupune respectarea unor condiții:

- elevii să posedă cunoștințe anterioare legate de problema dată;
- elevii să fie realmente interesați și obișnuiți să fie activi în lecțiile de matematică;
- situațiile conflictuale să fie judicios dozate pentru a nu bloca elevul;
- elevii să fie obișnuiți să lucreze individual sau în colaborare cu alți colegi;
- elevii să fie buni rezolvitori de probleme și cunoscători ai fenomenului creativ;
- elevii să fie obișnuiți cu atitudinea de colaborator al profesorului de matematică.

În concluzie, metoda problematizării este o metodă deosebită cu un pronunțat caracter formativ deoarece:

- antrenează întreaga personalitate a elevului: intelectul, calitățile voliționale, afectivitatea, captează atenția și îl mobilizează la efort;
- cultivă la elev autonomia acțională;
- formează la elev un stil activ de muncă;

- asigură susținerea motivației învățării;
- dă încrederea elevului în forțele proprii.

2. Metode de explorare și descoperire

a) Învățarea prin descoperire, este metoda în care elevii sunt puși să descopere adevărul, prin efort propriu, refăcând întreaga etapizare a elaborării cunoștințelor.

Învățarea prin descoperire poate fi considerată o continuare a problematizării, ce contribuie decisiv la înțelegerea noțiunilor și conceptelor matematice.

Prin intermediul ei, elevii sunt conduși să exploreze anumite situații concrete sau abstracte, să tragă o serie de concluzii noi și să descopere prin activitate proprie anumite adevăruri matematice.

Întreaga activitate de descoperire este permanent dirijată de profesor, dar numai prin plasarea unor sugestii minime și necesare, deoarece în rest, rolul principal îl are elevul care prin activitate proprie redescoperă relații, formule și algoritmi de calcul.

Metoda învățării prin descoperire (cf. [19], pag. 142) constă în următoarele: *profesorul îi determină pe elevi să găsească rezultatul dorit, printr-o serie de întrebări puse cu abilitate, fiecare întrebare corespunzând unei etape sau unui segment din descoperirea finală.*

Pentru elev, folosirea acestei metode presupune în prealabil o bună pregătire matematică, existența unor deprinderi corespunzătoare de lucru și o aplecare spre cercetarea domeniului matematic.

Metoda învățării prin descoperire o regăsim în practică sub forma a trei modalități, având la bază raționamentele folosite: descoperirea de tip inductiv, descoperirea de tip deductiv și descoperirea de tip transductiv sau analogic.

Descoperirea de tip inductiv, presupune plecarea de la analizarea unor cazuri particulare, stabilirea unei reguli generale și demonstrarea acesteia.

Exemplu: Metoda inducției matematice

Inducția matematică este o metodă prin care pornind de la propoziții adevărate pentru valori particulare (numere naturale), se construiesc

propoziții generale, $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ sau $n \in M \subset \mathbb{N}$, unde \mathbb{N} este mulțimea numerelor naturale, propoziții care pot fi adevărate sau false.

Metoda inducției matematice include trei părți:

- i) fixarea propoziției particulare;
- ii) formularea propoziției generale;
- iii) demonstrația matematică, prin care se stabilește valoarea de adevăr a propoziției generale (adevărată sau falsă).

Principiul inducției matematice (primul principiu al inducției matematice)

Etapa I: Verificarea

Etapa II: "Demonstrația" — se presupune că $P(k)$ este adevărată și se demonstrează că $P(k+1)$ este adevărată, k fiind un număr natural, $k \geq m$ (adică $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \geq m$).

Aplicație. Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că are loc identitatea:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Notăm propoziția

$$P(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

I. Verificarea:

$$P(1) : 1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} \quad (A).$$

$$P(2) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \frac{2(2+1)(2+2)}{3} \Leftrightarrow 2 + 6 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} \Leftrightarrow 8 = 8 \quad (A).$$

$$P(3) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = \frac{3(3+1)(3+2)}{3} \Leftrightarrow$$

$$2 + 6 + 12 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} \Leftrightarrow 20 = 20 \quad (A).$$

II. Demonstrația: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Presupunem $P(k)$ adevărată \Leftrightarrow

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \text{ pp. (A).}$$

Trebuie demonstrată $P(k+1)$.

Calculează partea stângă a lui $P(k+1)$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)[(k+1)+1] &= \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}. \end{aligned}$$

Descoperirea de tip deductiv, presupune stabilirea adevărurilor pentru cazul general, care vor fi valabile și pentru cazurile particulare.

În acest mod, elevii, aplicând diverse raționamente asupra cunoștințelor matematice anterioare, obțin rezultate noi prin combinarea și completarea lor.

Exemplu. Să se arate că în orice triunghi există inegalitatea

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Soluție.

Plecând de la inegalitatea mediilor $m_{arit} \geq m_{arm}$ aplicată pentru numerele $a+b, b+c, c+a$ deducem că:

$$\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}},$$

de unde obținem:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)},$$

dar

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - 3 \geq \\ &\geq (a+b+c) \frac{9}{2(a+b+c)} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Deci:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \quad (2.1)$$

cu egalitate pentru triunghiul echilateral.

Apoi, ținând cont de inegalitatea triunghiului obținem:

$$b+c > p, \quad c+a > p, \quad a+b > p,$$

de unde rezultă:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{a+b+c}{p} = 2,$$

adică

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2. \quad (2.2)$$

Din inegalitățile (2.1) și (2.2) obținem relația din enunț.

Descoperirea de tip analogic, presupune transpunerea unor relații și algoritmi matematici în contexte diferite, dar analoage într-un sens precizat.

Acest tip de învățare prin descoperire, are la bază raționamentul prin analogie, care pe baza asemănării a două obiecte matematice în privința anumitor note specifice, se extinde și la asemănarea probabilă a acestor obiecte în privința altor note cunoscute la primul obiect și necunoscute celuilalt.

Analogia înseamnă asemănare între noțiuni, asemănarea între metode de demonstrare, dar aceste asemănări sunt utile prin punerea ipotezelor, însă trebuie folosite cu prudență, deoarece, ele pot fi și false.

Exemplu: Demonstrarea proprietăților progresiei geometrice prin analogie cu proprietățile progresiei aritmetice.

b) Demonstrația, constă în prezentarea, de către cadrul didactic, a unor obiecte sau fenomene reale sau a unor substitute ale acestora, sau a unor acțiuni, operații ce urmează a fi învățate și dirijarea, prin intermediul cuvântului, a percepției acestora de către elevi.

Prin această modalitate, se dobândesc noi cunoștințe, se confirmă adevăruri anterior însușite sau se formează modelul intern al unei noi acțiuni.

Demonstrația didactică (cf. [6], pag. 215) *provoacă o percepție activă concret-senzorială, inductivă și este destinată să ajute elevul să pătrundă sensul structurii de bază a unui fenomen.*

Demonstrația, asigură acel suport concret senzorial în activitatea de cunoaștere, iar intuirea realității de către elevi este dirijată prin cuvântul cadrului didactic. Demonstrația logică se deosebește de demonstrația didactică prin faptul că ea are o fundamentare deductivă, adică folosește raționamentul logic.

Demonstrația matematică, este o formă a demonstrației logice, care constă într-un șir de raționamente inductive sau deductive prin intermediul cărora se dovedește un adevăr matematic.

Pentru a demonstra, trebuie să prezentăm, să dovedim și să convingem, adică în orice demonstrație se întâlnesc trei componente: ideea de demonstrat, argumentele aduse în sprijinul ideii și procedeul prin care demonstrăm.

Demonstrația prezintă mai multe forme: demonstrația logică, demonstrația cu ajutorul obiectelor naturale, demonstrația cu ajutorul obiectelor figurate, demonstrația cu ajutorul desenului, demonstrația cu ajutorul exemplelor și experiențelor, demonstrația teoremelor, demonstrația prin simulare și demonstrația prin folosirea modelelor.

Exemple de demonstrații ale teoremelor

Teorema lui Menelaus. Fie un triunghi ABC și punctele coliniare A', B', C' unde $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ și $C' \in (AB)$. Atunci are loc egalitatea:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

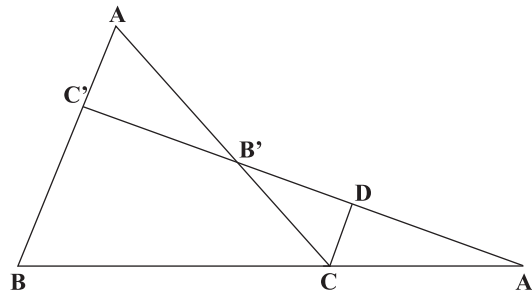


Figura nr. 3.

Demonstrație: Fiind vorba de rapoarte și legăturile ce trebuie stabilite între ele, apare necesitatea de a utiliza asemănarea triunghiurilor. Neavând triunghiuri asemenea, trebuie să le construim.

În acest sens ducem $CD \parallel AB$, unde $D \in C'A'$.

Din asemănarea triunghiurilor, obținem:

$$\triangle A'BC' \sim \triangle A'CD \Rightarrow \frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{DC},$$

$$\triangle B'CD \sim \triangle B'AC' \Rightarrow \frac{B'C}{B'A} = \frac{DC}{C'A}.$$

Înmulțind cele două relații, obținem că:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'B},$$

de unde:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Exemple de demonstrații prin inducție și prin reducere la absurd

Metoda reducerii la absurd.

Orice teoremă este o implicație logică $p \rightarrow q$. Teorema reciprocă fiind $q \rightarrow p$.

Folosind tablele de adevăr, se demonstrează că teorema directă $p \rightarrow q$ este echivalentă cu contrara teoremei reciproce $\neg q \rightarrow \neg p$.

Echivalența logică dintre teorema directă și contrara reciprocei se numește principiul contrapozității.

Metoda reducerii la absurd constă în: având de demonstrat implicația $p \rightarrow q$ se admite că nu este adevărată propoziția q (se neagă concluzia q) și atunci, evident, ar fi adevărată $\neg q$.

Folosind și ipoteza p , pe baza unor deduceri logice, se ajunge la o absurditate, care contravine fie ipotezei, fie unui adevăr evident, fie unui adevăr stabilit anterior. Contradicția obținută atestă valabilitatea teoremei directe $p \rightarrow q$.

Reciproca teoremei lui Menelaus.

Considerăm un triunghi ABC și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ și $C' \in (AB)$. Se presupune că două dintre puncte sunt situate pe două laturi ale triunghiului și unul este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi (sau că punctele A' , B' , C' sunt situate pe prelungirile laturilor triunghiului).

Dacă are loc egalitatea:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1, \quad (2.3)$$

atunci punctele A' , B' , C' sunt coliniare.

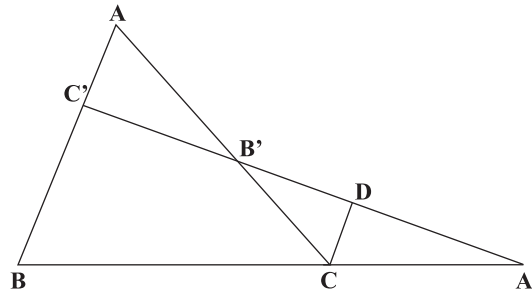


Figura nr. 4.

Demonstrație:

Presupunem că două dintre puncte sunt situate pe două laturi ale triunghiului și unul este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi.

Presupunem că punctele A' , B' , C' nu sunt coliniare.

Atunci dreapta $A'B'$ ar intersecta latura AB într-un punct C'' diferit de C' .

Aplicând teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare A' , B' , C'' obținem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1. \quad (2.4)$$

Din relațiile (2.3) și (2.4) rezultă că:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{C''A}{C''B}.$$

Ar însemna că segmentul $[AB]$ este împărțit de punctele interioare C' și C'' în același raport – contradicție, eliminând presupunerea făcută ajungem la concluzia că punctele A' , B' , C' sunt coliniare.

c) Modelarea, este o metodă de cercetare sau învățare a obiectelor și fenomenelor, care constă în folosirea unui model construit pe baza proprietăților esențiale ale originalului.

Modelul reprezintă un mod de materializare a generalului, a ansamblului de la care se pleacă în descoperirea elementelor particulare și reproduce simplificat trăsăturile și caracteristicile obiectelor și fenomenelor, dificil de perceput și cercetat, în mod direct.

Metoda modelării, se bazează pe construirea prin analogie a unor raționamente care sugerează posibilitatea existenței unor relații structurale sau funcționale între două obiecte, două fenomene sau două procese asemănătoare.

Modelarea, asigură accesibilitatea la ceea ce nu este posibil, în mod direct, deoarece cu ajutorul modelului se studiază indirect proprietățile unui obiect sau fenomen, cu care are anumite asemănări sau analogii esențiale.

Modelul este un sistem teoretic sau material cu ajutorul căruia se studiază în mod indirect proprietățile unui sistem mai complex cu care acesta prezintă o analogie.

Orice model nu poate reprezenta în totalitate proprietățile sistemului original, ci sunt reprezentate doar aproximări ale acestuia.

Având la bază, raționamentul prin analogie, toate ipotezele se pot verifica experimental și teoretic, ceea ce impulsionează gândirea în formularea unor noi ipoteze și în descoperirea unor noi adevăruri.

Există în modelare două tipuri importante: *modelare similară* și *modelare analogică*.

Modelarea similară constă în realizarea unui sistem de aceeași natură cu originalul, ce permite evidențierea trăsăturilor esențiale ale obiectului original.

Exemple: Machetele corpurilor geometrice.

Modelarea analogică constă numai într-o asemănare de tip analogic dintr-un punct de vedere esențial și nu o asemănare între model și original.

La baza modelării analogice stă construirea unui sistem a cărui descriere matematică este asemănătoare cu a sistemului original însă de natură diferită.

Astfel, prin investigarea unor proprietăți ale sistemului construit vom regăsi unele soluții aplicabile și sistemului original.

Exemple: Modelul fracțiilor ordinare și modelul fracțiilor algebrice.

În procesul modelării sunt surprinse următoarele momente ale cunoașterii:

- trecerea de la original la model;
- transformarea modelului sau experimentarea pe model;
- transferarea rezultatelor obținute de pe model pe original;
- verificarea experimentală a existenței noilor proprietăți obținute pe model.

Există și o clasificare a modelelor după natura suportului acestora și anume: *modele ideale* și *modele materiale*.

Modelele materiale au un suport material și le folosim în învățarea matematicii, foarte puțin, prin machete.

Modelele ideale, după suportul prin care sunt exprimate se împart la rândul lor în alte două categorii: modele ideale de ordinul I și modele ideale de ordinul II.

Modele ideale de ordinul I, sunt modelele cu suportul construit din imagini asemănătoare cu originalul. Exemplu schița unei teoreme, schița unei probleme și schema construită a unui copac.

Modele ideale de ordinul II, sunt exprimate prin semne ce nu se aseamănă cu originalul, însă asemănarea cu originalul este exprimată de anumite simboluri.

Din această categorie avem:

— *modele grafice*: reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice;

- *modele logice*: scheme de raționament;
- *modele matematice*: formule.

d) Algoritmizarea – este metoda care crează condiții necesare pentru descoperirea și asimilarea diversilor algoritmi ce pot fi apoi folosiți în rezolvarea sarcinilor învățării.

Algoritmizarea (cf. [13], pag. 297), *este o metodă ce se bazează pe folosirea algoritmilor în actul predării.*

Algoritmul este un ansamblu de reguli necesare pentru efectuarea unui sistem de operații care se desfășoară într-o ordine strict stabilită în rezolvarea unor probleme de o anumită tipologie.

Algoritmul are la baza o înlănțuire de raționamente ce se exprimă în mod sintetic în structura logică a rezolvării unei probleme de un anumit tip, adică este o construcție conștientă care anticipează un program de acțiune viitoare.

Algoritmizarea didactică presupune două lucruri: forma sau succesiunea aproximativ fixă a operațiilor săvârșite de elev și prestabilitatea lor de către profesor.

În aceste condiții, elevul își însușește, pe calea algoritmizării, cunoștințele sau tehnicile de lucru prin parcurgerea unei căi deja stabilite, îl scutește de efortul de a căuta singur și îi lasă disponibilă energia spre a o utiliza într-o altă direcție.

Prin structurarea lor precisă și prin folosirea repetată de către elev, acesta găsește în algoritmi un sprijin permanent în sensul disciplinării propriei gândiri și asigurării acurateței propriei activități.

Algoritmii se pot prezenta sub formă de reguli (de calcul, formule de operații) sub forma unui model sau a unei scheme de desfășurare a activității intelectuale, sau de rezolvare a unor probleme, de rezolvare a diverselor operații matematice, sau a unui instructaj care indică ordinea acțiunilor care trebuie executate într-un domeniu oarecare.

Deci, algoritmii pot fi grupați în algoritmi de rezolvare, algoritmi de recunoaștere, algoritmi de percepere, înțelegere, generalizare și sistematizare a cunoștințelor, algoritmi motrici, algoritmi de predare, algoritmi de învățare și algoritmi pentru descrierea evaluării.

Din punct de vedere metodic, învățarea unui algoritm ridică câteva probleme. După depistarea algoritmului urmează descrierea lui prin precizarea secvențelor sau operațiilor în succesiunea lor.

Astfel, elevul este familiarizat, în ansamblu, cu noul algoritm, unde

fiecare secvență este dezmembrată și învățată analitic și în final toate secvențele sunt din nou cuplate și înlănțuite.

Un algoritm este constituit din operatori (o anumită secvență din desfășurarea evenimentelor) și din condițiile logice care caracterizează situația în momentul alegerii unuia sau mai multor operatori posibili. Proprietățile algoritmilor sunt:

- determinarea, adică, structura logică a algoritmului trebuie să fie compact coerentă, fiecare operație să-și aibă un loc precis fixat în cadrul succesiunii generale;
- masivitatea sau generalitatea, adică un algoritm trebuie să servească la analiza, interpretarea și rezolvarea unei clase cât mai mari de situații problematice;
- finalitatea, care cere ca aplicarea unui algoritm să conducă la un rezultat cert.

Cu toate valențele formative ale acestei metode, trebuie semnalate și unele limite.

Astfel, nu toate tipurile de probleme se pot rezolva prin intermediul algoritmului. Există situații în care intelectul trebuie să intervină prin soluții noi, originale, relativ deosebite de ale unor situații anterioare.

De aceea, algoritmizarea este contrapusă uneori învățării de tip euristic, considerându-se că, spre deosebire de aceasta, în care elevul învață pe baza propriilor căutări, prin demersul de tip algoritmic elevul își însușește cunoștințe prin căi deja fixate.

Este corectă părerea care privește cele două moduri de structurare a achizițiilor de tip școlar nu în opoziție, ci în unitate sau mai precis în continuitate, deoarece, chiar și un algoritm odată asimilat poate fi supus restructurării (poate fi simplificat pentru a ușura munca elevului sau pot fi căutate variante mai potrivite în diverse situații).

Astfel (cf. [18], pag. 170) *consideră că, pe plan psihologic, aceasta coincide cu momentul de trecere de la deprindere la pricepere, adică la capacitatea de a aplica cunoștințele și deprinderile la condiții variate.*

De asemenea, unitatea dintre cele două aspecte ale învățării se poate exprima prin aceea că o strategie euristică însușită poate cuprinde în sine caracteristicile unui algoritm.

În fața unei probleme noi, mai complexe, se încearcă diferite căi de rezolvare, la început în mod euristic, iar după ce se găsește modalitatea

optimă de soluționare, aceasta poate fi folosită pentru rezolvarea altor probleme asemănătoare.

Se pune întrebarea dacă metoda algoritmicizării este o metodă de sine stătătoare sau este îmbinată cu celelalte sau inclusă în ele. În lucrările de pedagogie, unii autori o include între metodele active, alții o consideră o modalitate de învățare în limitele căreia sunt valorificate celelalte metode.

De asemenea (cf. [3], pag. 213) *consideră algoritmicizarea nu o metodă de sine stătătoare, ci o latură a fiecăreia dintre metodele cunoscute, dându-le acestora o coloratură specifică.*

Ei sugerează ideea că, în principiu, fiecare metodă poate avea o etapă algoritmică (inițială), urmată de o altă euristică, atunci când elevul este deja bine familiarizat cu domeniul pe care îl investighează.

În acest fel ea se poate regăsi parțial sau chiar total în instruirea programată, în instruirea asistată de calculator, în exercițiu, în demonstrație și în studiul de caz.

În cele ce urmează vom da un exemplu de folosire a metodei algoritmicizării.

Exemplu de algoritmicizare: Inversa unei matrice.

Fie matricea:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pentru calcularea inversei A^{-1} vom parcurge pașii:

Pasul 1. Se calculează $\det A$.

Dacă $\det A = 0$, matricea este singulară și nu are inversă.

Dacă $\det A \neq 0$, matricea este nesingulară și are inversă.

Pasul 2. Se determină matricea transpusă,

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pasul 3. Se calculează matricea adjunctă,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

unde $A_{ij} = (-1)^{i+j}d_{ij}$.

Pasul 4. Se calculează inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Aplicație practică

Să se determine inversa matricii

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pasul 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Pasul 2.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pasul 3.

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pasul 4.

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observație. În ecuațiile matriciale scrierea inversei sub această formă

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

este utilă, deoarece, putem înmulți matricile fără să avem coeficienți fracționari.

3. Metode bazate pe acțiune practică (de formare a deprinderilor)

a) Exercițiu

Ioan Cerghit definește exercițiul ca o metodă de învățământ bazată pe acțiune, spre deosebire de alte metode predominant logice (expozitive) sau cele bazate pe perceptivitate (demonstrarea de exemplu).

Exercițiul definit ca metodă de învățare (cf. [6], pag. 245), *înseamnă repetiția executării unei mișcări, acțiuni, forme comportamentale până la stăpânirea automată a acestora, până la formarea unor deprinderi ca reacții sau răspunsuri automatizate unei situații bine definite.*

De asemenea (cf. [32], pag. 62) se conferă exercițiului următoarea caracterizare: *"executarea repetată, sistematică și conștientă a unei acțiuni fizice sau intelectuale, în vederea dobândirii sau perfecționării unei priceperi sau deprinderi".*

Pe baza acestor definiții se pot desprinde câteva trăsături specifice, esențiale ale acestei metode de învățământ.

Astfel, exercițiul este o acțiune motrică sau intelectuală care se repetă conform anumitor cerințe, în scopul formării unor deprinderi și priceperi, abilități și aptitudini. El nu se confundă cu repetarea, exercițiul reprezentând o îmbunătățire continuă a performanței de la o repetare la alta, până la atingerea scopului dorit.

Prin intermediul exercițiului se mențin la un anumit nivel (optim sau maxim) unele funcții, structuri. El poate genera noi funcții creatoare, poate spori capacitatea operatorie a cunoștințelor, deprinderilor și priceperilor și poate preveni uitarea.

Și în activitatea didactică, ca metodă omniprezentă, exercițiul presupune efectuarea conștientă, repetată a unor acțiuni în vederea realizării următoarelor scopuri:

- dezvoltarea operațiilor mentale, ușurarea aprofundării noțiunilor, teoriilor, principiilor științifice și aplicarea lor la situații noi și variate;
- asigurarea însușirii și formării corecte a unor noi priceperi și deprinderi de muncă, dezvoltarea calităților morale, trăsăturilor de voință și caracter, consolidarea cunoștințelor și deprinderilor însușite ceea ce face să crească posibilitatea păstrării lor în memorie;

- prevenirea uitării și evitarea tendințelor de interferență, oferirea posibilităților de transfer a cunoștințelor, capacităților și comportamentelor însușite;
- stimularea capacităților creatoare a originalității și spiritului de independență și inițiativă.

În clasificarea exercițiilor se întâlnesc mai multe criterii: psihologice în funcție de care exercițiile pot fi psihomotorii, cognitive, afective, de percepere și reprezentare, memorie etc.; logice în care o dominantă a exersării poate fi compararea, analiza, sinteza, generalizarea, abstractizarea; și sociale, funcție de care exercițiile pot fi individuale, de grup, sportive, artistice, literare etc.

Clasificarea exercițiilor are însă la bază, mai ales criterii pedagogice. Astfel:

1. După funcțiile îndeplinite, exercițiile pot fi: introductive, de bază, de creație, reproductiv paralele, de operaționalizare, de evaluare.
2. După modul de organizare, exercițiile pot fi: individuale, colective, frontale, de grup.
3. După forma de desfășurare pot fi: orale, scrise, practice, combinate.
4. După gradul de participare al profesorului pot fi: dirijate, semidirijate, autodirijate (de către elevi).
5. După gradul de complexitate pot fi: complexe și simple.
6. După conținutul obiectului de învățământ pot fi: de biologie, matematică sau de manipulare a unor aparate, dispozitive sau mașini etc.
7. După natura specifică a deprinderilor care urmează să fie formate pot fi: exerciții motrice (de scriere, de mânăuire a unor aparate, de sport) și exerciții intelectuale ce contribuie la formarea operațiilor intelectuale.

S-a constatat că formarea unor priceperi și deprinderi de a executa o activitate necesită parcurgerea următoarelor momente:

- demonstrarea activității model de către profesor, momentul analitic: activitatea prezentă inițial ca fiind unitară, este fragmentată în mișcări componente;

- executarea de către elevi a fiecărei mișcări elementare;
- legarea mișcărilor elementare mai întâi câte două, apoi câte trei etc;
- executarea întregii activități cu ajutorul și sub supravegherea profesorului;
- tentativa elevului de a efectua independent întreaga activitate, perfecțiunea deprinderii sub aspectul vitezei de execuție și a reducerii numărului de greșeli, cristalizarea unei abilități;
- legarea activităților de anumite trebuințe în scopul stimulării unor obișnuințe;
- transformarea deprinderilor și a obișnuințelor în priceperi prin deschiderea spre informații științifice;
- integrarea abilităților, priceperilor și deprinderilor obținute într-o activitate mai complexă.

Obținerea unui randament maxim în aplicarea metodei exercițiului implică respectarea anumitor cerințe didactice după cum urmează:

- alegerea și formularea corectă a exercițiului astfel încât acesta să aibă un conținut bazat pe cunoștințe și priceperi anterioare ale elevilor și date suficiente cu caracter de noutate;
- participarea conștientă și activă a elevilor la efectuarea exercițiului, care se poate realiza numai printr-o înțelegere a scopului și cunoașterea informației teoretice ce stă la baza lui și care înlătură mecanica acțiunii, asigurând caracterul conștient al modului de rezolvare;
- sistematizarea și succesiunea exercițiilor asigură efectuarea lor într-o ordine logică care asigură consolidarea cunoștințelor într-un tot unitar. De asemenea, exercițiile trebuie să se succedă în mod progresiv sub aspectul complexității și dificultăților de probleme;
- noutatea și varietatea exercițiilor cer ca fiecare din ele să fie formulate în mod diferit, să fie introduse și exerciții noi și rezolvarea lor să se facă în condiții diferite și din ce în ce mai complexe;

- exercițiul trebuie să aibă un caracter util pentru a mări interesul elevului în efectuarea lui, a mări capacitatea acestuia de autocontrol, de a-i forma răspunderea față de munca depusă, de a-i întări atașamentul față de meseria pentru care se pregătește.

Eficacitatea exercițiului depinde în bună măsură de atitudinea pe care o are cel ce îl efectuează, adică de înțelegere, de afecțiune și de plăcere. De asemenea, dozarea rațională a numărului de exerciții pot influența eficacitatea lor astfel încât elevii să nu fie supraîncărcați.

Pentru corectarea exercițiilor profesorul trebuie să aibă în vedere următoarele:

- să realizeze o privire generală a întregii clase, precum și a fiecărui elev în parte;
- să intervină ori de câte ori elevul are greutăți în rezolvarea exercițiului;
- să asigure condițiile necesare rezolvării exercițiului de către elevi;
- să folosească pe lângă metoda exercițiului și alte metode ca: demonstrația, conversația euristică etc.;
- să realizeze la început o analiză de către el, după care să urmeze un autocontrol de către elevi.

În continuare vom da exemple de fișe de exerciții pe câteva capitole matematice.

Fișa nr. 1. Ecuații iraționale

Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{4 - 3x} = -7$

b) $\sqrt{3 - 2x} = x$

c) $\sqrt{x + 2} = 3$

d) $\sqrt{x + 1} = x - 1$

e) $\sqrt{x + 1} = 5 - x$

f) $\sqrt{x - 5} + \sqrt{10 - x} = 3$

g) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 7} = \sqrt{4x + 17}$

h) $\sqrt{7 - \sqrt{x - 3}} = 2$

Fișa nr. 2. Funcții derivabile

1. Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \quad f(x) = \frac{2}{(2x+1)(2x+3)}.$$

a) Să se demonstreze egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\}.$$

b) Să se demonstreze că

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(100) = \frac{202}{203}.$$

2. Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{dacă } x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2}, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}.$$

a) Să se determine parametrii reali a și b astfel încât f să fie derivabilă în 1.

b) Pentru a și b determinați mai sus să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

3. Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x - 2009}{x + 1}.$$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x \cdot (x + 2)$.

a) Să se demonstreze egalitatea $f(x) = 2^{x+1} \cdot (x + 1) - 2^x \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(9)$.

Fișa nr. 3. Polinoame

1. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$,

$$f = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{3}, \quad g = \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{4}.$$

Să se afle câtul și restul împărțirii lui f la g .

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, cu a și b parametri reali.

a) Să se determine a și b știind că polinomul f se divide cu $X + 1$ și că $f(1) = 4$.

b) Pentru $a = 1$ și $b = 2$, să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

3. Se consideră polinomul $f = X^4 - 6x^3 + 13X^2 - 12X + 5$.

a) Să se verifice că $f = (X - 1)^2(x - 2)^2 + 1$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

4. Se consideră polinoamele cu coeficienți în corpul \mathbb{Z}_3 , $f = X^3 + \hat{2}X$ și $g = X^5 + \hat{2}X$.

a) Să se determine rădăcinile polinomului f .

b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului g la polinomul f .

Fișa nr. 4. Limite de funcții

Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x} + \dots + \sqrt{1+2008x} - 2008}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2}{x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{100x^2 + 2008x + 1} - \sqrt{100x^2 - 12x - 1} \right)$.

d) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că are loc egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2008x^2 + 2007x + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 1.$$

Fișa nr. 5. Sisteme de ecuații liniare

1. Să se rezolve sistemele de ecuații liniare prin metoda lui Cramer

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases};$

b) $\begin{cases} -x - y + 10z = -15 \\ 3x + 3y + 6z = 9 \\ 6x + 6y + 16z = 14 \end{cases};$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x - 3y - 2z = -7 \\ 3x + 4y - 2z = 4 \end{cases};$

d) $\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

$$e) \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2y + 2z + t = 2 \\ -2x + 2y - t = 2 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} ; \quad f) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ x - 5y - 4z = -8 \end{cases} .$$

b) Metode active folosite în predarea matematicii

Realizarea unui învățământ activ nu se poate înlăptui decât cu ajutorul metodelor active.

Iată de ce se impune diminuarea activităților care limitează folosirea metodelor moderne, active, care dezvoltă gândirea, capacitatea de investigație a elevilor și deprinderea de a aplica în practică cele însușite.

Toate metodele active sunt metode operatorii, care conduc la realizarea efectivă a operațiilor de gândire și sunt favorabile dezvoltării unui constructivism operatoriu.

De aceea numai adevărata metodologie participativă este în măsură să favorizeze, atât elaborarea noilor cunoștințe prin eforturi proprii, cât și construcția operațiilor mintale corespunzătoare, pe care vrem să le formăm, în locul acelor primite de-a gata, cu un minimum de efort de memorizare și de reproducere a exemplelor și metodelor propuse.

În acest sens, sunt considerate active acele metode care nu încorsetează elevul într-o rețea de expresii fixe sau de reguli rigide, ci care rezervă o pondere crescândă elevului în interacțiunea lui cu obiectele învățării, care determină un maximum de activism al structurilor operațional-mintale în raport cu sarcinile de învățare în care este angajat acesta.

Astfel, "activ" este elevul care gândește, care depune un efort de reflecție personală, interioară și abstractă, care întreprinde o acțiune mintală de căutare, de cercetare și redescoperire a adevărilor, de elaborare a noilor cunoștințe și nu cel care se menține la nivelul acțiunii concret-senzoriale, intuitiviste și nici cel care face apel la facultatea de receptare și de reproducere a cunoștințelor.

Acest lucru nu trebuie să ne depărteze de metodele clasice, ca fiind lipsite de virtuți, deoarece, în activizarea elevilor putem îmbina în mod armonios foarte bine metodele clasice cu cele moderne.

Folosirea în lecțiile de matematică a metodelor active dau o eficiență sporită și o mare valoare formativă, care stimulează dezvoltarea operațiilor intelectuale și prin caracterul lor activ-participativ, suscită din partea elevilor o activitate propice exercitării și utilizării inteligenței lor.

În cele ce urmează, chiar dacă le-am mai amintit, vom prezenta câteva metode active, care se pot aplica în matematică: problemati-

zarea, învățarea prin descoperire, brainstormingul, metoda ciorchinelui, metoda cubului, turul galeriei, mozaicul și modelarea didactică. Sigur, vom face referiri numai la cele pe care nu le-am prezentat în cadrul clasificării date.

1) Brainstormingul

Brainstormingul este metoda care permite crearea unor idei și concepte inovatoare, unde participanții își vor expune ideile și părerile fără teama de a fi respinși sau criticați.

Metoda brainstorming, sau furtună în creier, a fost inițiată de Alex. Osborn și (cf. [14], pag. 79) *are foarte multe utilizări nu numai în domeniul educațional ci într-o mulțime de alte domenii de activitate, pentru capacitatea sa de a stimula creativitatea și de a genera multe idei într-un timp scurt.*

Pentru brainstorming este necesară o jumătate de oră și participă grupuri de minim 10 elevi.

În acest sens, se expune un concept, o idee sau o problemă și fiecare își spune părerea despre cele expuse, adică absolut tot ceea ce le trece prin minte, inclusiv idei comice sau inaplicabile.

Pentru realizarea unui brainstorming sunt necesare următoarele etape:

- deschiderea sesiunii de brainstorming;
- perioada de acomodare de 5-10 minute;
- partea creativă a brainstormingului;
- prelucrarea ideilor și stabilirea unui acord.

Există o perioadă de acomodare ce durează 5-10 minute și are ca scop introducerea grupului în atmosfera brainstormingului, unde participanții sunt stimulați să discute idei generale pentru a putea trece la un nivel superior.

În partea creativă a brainstormingului, care are o durată de 25-30 de minute, este recomandat ca în timpul derulării acestei etape, profesorul să amintească permanent cât timp a trecut și cât timp a mai rămas.

În încheierea părții creative, sunt clarificate ideile de bază puse în discuție și se verifică dacă toți elevii au înțeles ideile dezbătute.

De aceea, se vor elimina sugestiile prea îndrăznețe și care nu sunt îndeajuns de pertinente, se face o evaluare a sesiunii de brainstorming și se vor puncta contribuțiile fiecărui participant la derularea sesiunii.

În final, cei care au participat la brainstorming își vor spune părerea despre participarea grupului supus la acțiunea de brainstorming și vor stabili care au fost ideile care s-au pliat cel mai bine pe conceptul dezbătut.

Aplicație.

Vom folosi metoda brainstorming la rezolvarea unei probleme de geometrie plană.

Etape:

1. Alegerea sarcinii de lucru

Fie $ABCD$ un patrulater convex, în care BC și AD nu sunt paralele, fie $E \in (BC)$ și $F \in (AD)$ astfel încât:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD}.$$

Construim paralelogramele $ABEG$ și $ECDH$. Demonstrați că:

a) $AG \parallel DH$;

b) $\triangle GFA \equiv \triangle DFH$;

c) Punctele G , F și H sunt coliniare;

d) (EF) este bisectoarea unghiului $\angle GEH$.

2. Solicitarea imediată a tuturor ideilor legate de rezolvarea problemei și cerința legată de propunerea unor strategii de rezolvare. Se pot primi sugestii legate de realizarea unei figuri cât mai corecte și de verificare "pe desen" a proprietăților cerute în concluzia problemei, chiar prin măsurarea unor unghiuri sau a unor segmente.

Foarte importantă este lăsarea unui timp pentru ca elevii să propună orice metodă care cred că poate fi folosită.

3. Toate ideile importante vor fi scrise pe tablă și se va lăsa o pauză, care poate fi de la 15 minute până chiar la o zi.

La sfârșit, elevii trebuie să transcrie toate ideile ca pe timpul pauzei, să mai reflecteze asupra lor.

4. Reluarea ideilor emise pe rând și gruparea lor pe teme importante și pe analiza unor cuvinte cheie care în cazul de față sunt: măsurare, congruență, asemănare și paralelism.

5. Etapa analizei critice, a evaluării, a argumentării și selectării ideilor originale sau a celor mai apropiate de soluția fezabilă pentru problema discutată.

Acum este necesară folosirea îndrumărilor de orientare a gândirii sub forma unor întrebări de tipul:

– dacă figura este desenată corect, măsurătorile pot asigura o evaluare imediată?

– putem folosi cazuri particulare pentru problema dată?

6. Folosirea afișării ideilor rezultate în forme cât mai variate și originale: colaje, imagini, desene, etc.

În urma discuțiilor purtate cu elevii, trebuie să rezulte strategia de rezolvare a problemei și aceasta poate fi sintetizată sub forma unor indicații de rezolvare de tipul:

- vom construi figura cu ajutorul instrumentelor geometrice;
- vom aplica un criteriu de asemănare;
- vom folosi teorema bisectoarei.

2) Mozaicul

Mozaicul sau ”metoda grupurilor interdependente” este o strategie bazată pe învățarea în echipă (team-learning).

Fiecare elev are o sarcină de studiu în care trebuie să devină expert. El are în același timp și responsabilitatea transmiterii informațiilor asimilate, celorlalți colegi.

Metoda mozaicului (cf. [14], pag. 169) *îmbină învățarea individuală cu învățarea în echipă.*

În cadrul acestei metode, rolul profesorului este mult diminuat, el intervenind semnificativ la începutul lecției când împarte elevii în grupurile de lucru și trasează sarcinile, și la sfârșitul activității când prezintă concluziile activității.

Atunci când vrem să o folosim trebuie evidențiat:

- stabilirea temei și a unității de învățare;
- formarea echipelor de învățare.

Există mai multe variante ale metodei mozaic, însă noi vom prezenta varianta standard a acestei metode care se realizează în cinci etape.

Etapa 1. Pregătirea materialului de studiu

Profesorul stabilește tema de studiu și o împarte în 4-5 subteme și pentru fiecare subtemă, poate stabili elementele principale pe care trebuie să pună accentul elevul, atunci când studiază materialul în mod independent.

Acestea pot fi formulate fie sub formă de întrebări, fie sub formă de text care va putea fi completat numai atunci când elevul studiază materialul.

Etapa 2. Faza lucrului independent

Organizarea colectivului se face în echipe de învățare de câte 4-5 elevi, în funcție de numărul lor în clasă, unde fiecare elev din echipă, primește un număr și are ca sarcină să studieze în mod independent, subtema corespunzătoare numărului său.

El trebuie să devină expert în problema dată, adică elevii cu numărul 1 din toate echipele de învățare formate vor aprofunda subtema cu numărul 1, cei cu numărul 2 vor studia subtema cu numărul 2, și așa mai departe.

Fiecare elev studiază subtema lui, citește textul corespunzător, iar acest studiu poate fi făcut în clasă sau poate constitui o temă de casă, realizată înaintea organizării mozaicului.

Etapa 3. Constituirea grupului de experți

După ce au parcurs faza de lucru independent, experții cu același număr se reunesc, constituind grupe de experți pentru a dezbate problema împreună.

În acest sens, elevii cu numărul 1, părăsesc echipele de învățare inițiale și se adună la o masă pentru a aprofunda subtema cu numărul 1, la fel procedează și ceilalți elevi cu numerele 2, 3, 4 sau 5.

Faza discuțiilor în grupul de experți, unde elevii prezintă un raport individual asupra a ceea ce au studiat independent, au loc pe baza datelor și a materialelor avute la dispoziție, la care se mai adaugă elemente noi și de la ceilalți membrii din echipa inițială.

Știind că fiecare elev este membru într-un grup de experți și face parte în același timp dintr-o echipă de învățare, mesele de lucru ale grupurilor de experți trebuie plasate în diferite locuri ale sălii de clasă, pentru a nu se deranja reciproc.

Astfel, scopul comun al fiecărui grup de experți este să se instruiască

cât mai bine, având responsabilitatea propriei învățări și a predării și învățării colegilor din echipa inițială.

Etapa 4. Reîntoarcerea în echipa inițială de învățare

Faza raportului în care echipa de experți transmite cunoștințele asimilate, reținând la rândul lor cunoștințele pe care le transmit colegii lor, experți în alte subteme.

Această modalitate de transmitere trebuie să fie scurtă, concisă, atractivă și să fie însoțită pe cât posibil de suporturi audio-vizuale și de diverse materiale.

În acest sens, specialiștii într-o subtemă pot demonstra o idee, pot citi un raport, pot folosi computerul și pot ilustra ideile cu ajutorul diagramei, desenelor și a fotografiilor.

Etapa 5. Evaluarea

În această etapă grupele prezintă rezultatele întregii clase și elevii sunt gata să demonstreze ce au învățat.

Prin întrebările puse de profesor, se poate cere un raport sau se poate da spre rezolvare fiecărui elev o fișă de evaluare.

Dacă se recurge la evaluarea orală, atunci fiecărui elev i se va adresa o întrebare la care trebuie să răspundă fără ajutorul echipei.

Aplicație practică. Aritmetică clasa a V-a. Propoziții compuse

Etapa 1. Se împarte clasa în grupuri eterogene de 5 elevi, fiecare dintre aceștia primind câte o fișă de învățare numerotată de la 1 la 4. Fișele cuprind părți ale unui material, ce urmează a fi înțeles și discutat de către elevi din tema aleasă "Propoziții compuse".

Cele patru fișe de lucru sunt asemănătoare cu cele predate la clasă, unde în cadrul propozițiilor compuse am folosit conectorii logici "și" \wedge , "sau" \vee , "nu" \neg , "dacă, atunci" \rightarrow .

Etapa 2. Prezentarea succintă a subiectului tratat prin explicarea sarcinii de lucru și a modului în care se va desfășura activitatea, legată de tema aleasă "Propoziții compuse".

Etapa 3. Se face regruparea elevilor, după numărul fișei primite, în grupuri de experți, unde toți elevii care au numărul 1 vor forma un grup, cei cu numărul 2 vor forma alt grup ș.a.m.d.

Așadar, unul dintre grupurile de "experți" va fi format din toți elevii

care au primit, în cadrul grupului inițial de 5, subtema cu titlul: Cum putem obține propoziții adevărate folosind ”și”?

Etapa 4. Învățarea prin cooperare a secțiunii care a revenit fiecărui grup de experți.

În acest sens, toți elevii citesc, discută, încearcă să înțeleagă cât mai bine și hotărăsc modul în care pot preda ceea ce au înțeles colegilor din grupul lor originar.

Astfel, elevii din fiecare grup decid cum vor ”preda” și cum pot folosi desenele, exemplele numerice, textele în vorbirea curentă și simbolurile matematice.

Etapa 5. Revenirea în grupul inițial și predarea secțiunii pregătite celorlalți membri.

Atunci când se ivesc neclarități, sunt adresate întrebări expertului, iar dacă neclaritățile persistă sunt adresate întrebări și celorlalți membri din grupul expert pentru secțiunea respectivă.

În acest mod, în fiecare grup, sunt astfel ”predate” cele patru subteme ale lecției încât fiecare elev devine responsabil atât pentru propria învățare, cât și pentru transmiterea corectă și completă a informațiilor.

În final prin câteva întrebări bine alese de profesor se poate evidenția nivelul de înțelegere a temei parcurse.

Metoda mozaicului are avantajul că implică toți elevii în activitate și că fiecare dintre ei devine responsabil, atât pentru propria învățare, cât și pentru învățarea celorlalți.

3) Metoda cubului

Metoda cubului presupune explorarea unui subiect, a unei situații din mai multe perspective, permițând abordarea complexă și integratoare a unei teme.

Astfel, metoda cubului (cf. [14], pag. 172), *este utilizată atunci când se urmărește explorarea unui subiect sau a unei atitudini din mai multe perspective.*

În utilizarea acestui procedeu este recomandată parcurgerea următoarelor etape:

Etapa 1. Realizarea unui cub pe ale cărui fețe sunt scrise cuvintele: descrie, compară, analizează, asociază, aplică, argumentează.

Etapa 2. Anunțarea temei, subiectului pus în discuție.

Etapa 3. Împărțirea clasei în 6 grupe, fiecare dintre ele examinând tema din perspectiva cerinței de pe una din fețele cubului.

- a) Descrie: culorile, formele, mărimile etc.
- b) Compară: ce este asemănător? Ce este diferit?
- c) Analizează: spune din ce este făcut? Din ce se compune?
- d) Asociază: la ce te îndeamnă să te gândești?
- e) Aplică: ce poți face cu aceasta? La ce poate fi folosită?
- f) Argumentează: pro sau contra și enumeră o serie de motive care vin în sprijinul afirmației tale.

Aplicație practică. Divizibilitatea numerelor naturale – clasa a VI-a.

În acest scop am realizat un cub din carton și am colorat fiecare față diferit, iar fiecărei fețe i-am asociat un verb, după cum urmează:

La început este necesară o discuție, în care trebuie să soluționez situațiile în care elevii trebuie să se implice în cadrul activității în grup.

Pentru elevii care au primit fișa de lucru cu verbul **Descrie** au avut următoarele sarcini:

- de enunțat definițiile pentru divizor, multiplu;
- de enumerat criteriile de divizibilitate învățate;
- de identificat numerele prime, numere prime între ele;
- de stabilit relația între c.m.m.d.c., c.m.m.m.c. și produsul a două numere.

Pentru elevii care au primit fișa de lucru cu verbul **Compară** au de stabilit asemănări și deosebiri între criteriile de divizibilitate (cu 3 și 9; cu 4 și 25); între procedeele de calcul pentru c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

Pentru elevii care au primit fișa de lucru cu verbul **Asociază** au identificat dintr-o mulțime numerele divizibile cu 2, cu 3, cu 5, cu 10 și au completat spațiile punctate cu răspunsuri corecte.

Pentru grupa care a avut verbul **Analizează**, sarcina de lucru cere ca elevii să analizeze în ce mod se poate forma un dreptunghi cu ajutorul unor bețișoare de lungimi diferite și cine este câștigătorul unui joc.

Pentru elevii care au primit o fișă de lucru cu verbul **Argumentează** au avut de analizat și justificat în scris valoarea de adevăr a unor propoziții, ce au conținut și chestiuni capcane.

Le-am cerut să realizeze și scurte demonstrații sau să descopere greșeala dintr-o redactare a unei rezolvări.

În sfârșit, pentru elevii din grupa verbului **Aplică** au un set de întrebări grilă în care au aplicat criteriile de divizibilitate, metodele de calcul a c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c., teorema împărțirii cu rest, etc.

Pentru evaluarea activității, după expirarea timpului de lucru (20-25 minute), am aplicat metoda "turul galeriei".

Materialele realizate au fost expuse în 6 locuri vizibile, unde elevii din fiecare grup și-au prezentat sarcina de lucru și modul de realizare a ei, după care au acordat note materialelor realizate de celelalte grupe, urmând ca eu să discut împreună cu ei obiectivitatea notelor acordate și să corectez eventualele erori.

Ca premiu, fiecare echipă a primit câte un material informativ, astfel:

Echipa 1 - Referat despre Arhimede;

Echipa 2 - Referat despre criterii particulare de divizibilitate (cu 7, cu 11, cu 13);

Echipa 3 - Referat despre "Ciurul lui Eratostene";

Echipa 4 - Referat despre Aristotel;

Echipa 5 - Referat despre Cantor;

Echipa 6 - Referat despre forma numerelor prime.

Fișa nr. 1: Verbul "Descrie"

1. Enunțați definiția divizibilității numerelor naturale.
2. Enumerați criteriile de divizibilitate studiate.
3. Scrieți mulțimea divizorilor lui 24.
4. Identificați în mulțimea divizorilor numărului 24, divizorii proprii și divizorii improprii.
5. Stabiliți relația dintre c.m.m.d.c., c.m.m.m.c. și produsul a 2 numere naturale.

Fișa nr. 2: Verbul "Compară"

1. Realizați un scurt eseu matematic în care să puneți în evidență asemănări și deosebiri sau analogii între criteriile de divizibilitate cu 3 și 9; cu 4 și 25; cu 8 și 125.
2. Calculează c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. și compară rezultatele, pentru numerele:
 - a) 324 și 432; b) 120; 201; 504; c) 35 și 54.

Fișa nr. 3: Verbul "Asociază"

1. În mulțimea A = identifică numerele divizibile cu 2; cu 3; cu 5; cu 10.

2. Înlocuiți literele cu numerele naturale corespunzătoare:

- a) $\overline{15x} : 3$ pentru $x \in \mathbb{N}$
- b) $\overline{3x1x} : 5$ pentru $x \in \mathbb{N}$
- c) $\overline{3x5y} : 15$ pentru $x, y \in \mathbb{N}$

Fișa nr. 4: Verbul ”Analizează”

1. Având 4 bețișoare cu lungimea de 1 dm fiecare, 5 bețișoare cu lungimea de 2 dm fiecare, 7 bețișoare cu lungimea de 3 dm fiecare și 8 bețișoare cu lungimea de 4 dm fiecare, analizați dacă se poate forma un dreptunghi având așezate toate aceste bețișoare cap la cap pe conturul său?
2. Doi jucători joacă următorul joc: ei aleg, pe rând, un divizor natural pozitiv al numărului 1000, cu condiția ca, de fiecare dată, numărul ales să nu dividă nici unul din divizorii deja aleși până atunci. Primul care alege 1000 ca divizor pierde. Analizați ce se întâmplă dacă jocul se schimbă, în sensul că fiecare număr nou ales să nu aibă mai puțini divizori decât oricare din numerele anterioare alese. Analizați cine câștigă jocul.

Fișa nr. 5: Verbul ”Argumentează”

1. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor următoare, justificând răspunsurile:
 - a) Suma a două numere naturale pare este un număr par.
 - b) Suma a două numere naturale impare este un număr impar.
 - c) Dacă $m \in \mathbb{N}$ este divizibil cu 6 și cu 4, atunci m este divizibil cu 24.
 - d) Dacă $m \in \mathbb{N}$ este divizibil cu 17, atunci dacă $15 : m$, el este divizibil cu 51.
2. a) Găsiți un multiplu comun al numerelor 30 și 37. Arătați că orice multiplu comun al lor este divizibil cu produsul lor.
 - b) Este adevărată afirmația și în cazul numerelor 36 și 40? Justificați.

Fișa nr. 6: Verbul ”Aplică”

1. Aflați două numere naturale al căror produs este 26460, iar c.m.m.d.c. al lor este 14.
2. Există un număr care împărțit la 3 să dea restul 1, împărțit la 4 să

dea restul 2, împărțit la 5 să dea restul 3 și împărțit la 6 să dea restul 4?

3. Să se determine toate numerele naturale de 4 cifre, care împărțite la $\overline{34x}$ să dea câtul 10 și restul 12, știind că $\overline{34x}$ se divide cu 6.

4. Fie A mulțimea numerelor de forma $\overline{12x}$ divizibile cu 12 și B mulțimea numerelor de forma $\overline{1ab}$ divizibile cu 15.

a) Să se determine mulțimile A și B .

b) Să se afle $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

4) Turul galeriei

Turul galeriei este o metodă interactivă de învățare bazată pe colaborarea între elevi, care sunt puși în ipostaza de a găsi soluții de rezolvare a unor probleme. Această metodă presupune evaluarea interactivă și profund formativă a produselor realizate de grupuri de elevi.

Astfel, turul galeriei constă în următoarele:

1. Elevii, în grupuri de trei sau patru, rezolvă o problemă (o sarcină de învățare) susceptibilă de a avea mai multe soluții (mai multe perspective de abordare).

2. Produsele muncii grupului se materializează într-o schemă, diagramă, inventar de idei etc. notate pe o hârtie (un poster).

3. Posterele se expun pe pereții clasei, transformați într-o veritabilă galerie.

4. La semnalul profesorului, grupurile trec pe rând, pe la fiecare poster pentru a examina soluțiile propuse de colegi. Comentariile și observațiile vizitatorilor sunt scrise pe posterul analizat.

5. După ce se încheie turul galeriei (grupurile revin la poziția inițială, înainte de plecare) fiecare echipă își reexaminează produsul muncii lor comparativ cu ale celorlalți și discută observațiile și comentariile notate de colegi pe propriul poster.

Turul galeriei se folosește cu succes împreună cu metoda cubului așa cum se poate vedea și în exemplul 3, prezentat anterior.

5) Ciorchinele

Deși este o variantă mai simplă a brainstorming-ului, ciorchinele este o metodă care presupune identificarea unor conexiuni logice între idei, poate fi folosită cu succes atât la începutul unei lecții pentru reactualizarea cunoștințelor predate anterior, cât și în cazul lecțiilor de sinteză, de recapitulare, de sistematizare a cunoștințelor.

Ciorchinele este o tehnică de căutare a căilor de acces spre propriile cunoștințe evidențiind modul de a înțelege o anumită temă, un anumit conținut.

Ciorchinele reprezintă o tehnică eficientă de predare și învățare care încurajează elevii să gândească liber și deschis.

Metoda ciorchinelui funcționează după următoarele etape:

1. Se scrie un cuvânt/tema (care urmează a fi cercetat(ă)) în mijlocul tablei sau a unei foi de hârtie.
2. Elevii vor fi solicitați să-și noteze toate ideile, sintagmele sau cunoștințele pe care le au în minte în legătură cu tema respectivă, în jurul cuvântului din centru, tragându-se linii între acestea și cuvântul inițial.
3. În timp ce le vin în minte idei noi și le notează prin cuvintele respective, elevii vor trage linii între toate ideile care par a fi conectate.
4. Activitatea se oprește când se epuizează toate ideile sau când s-a atins limita de timp acordată.

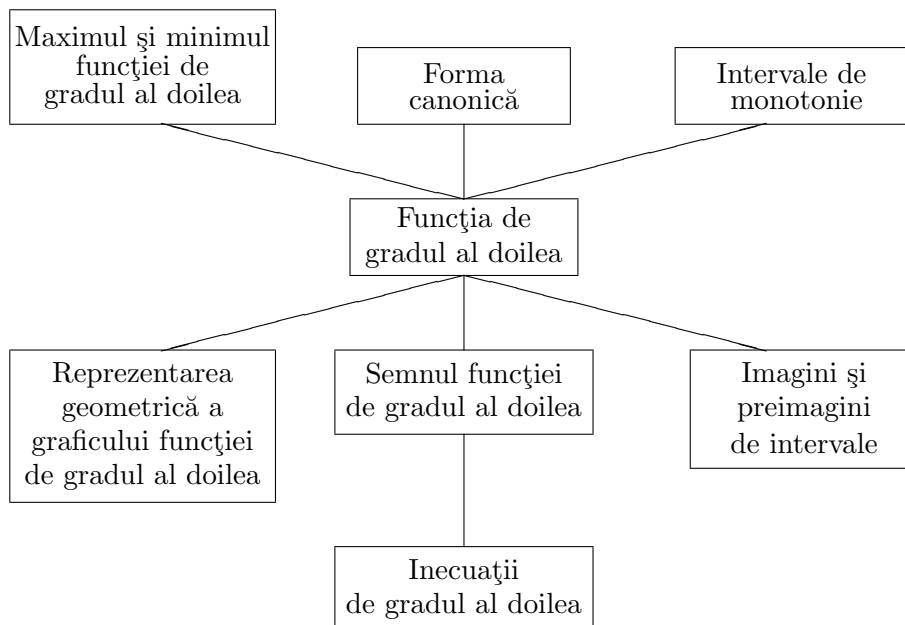
Există câteva reguli ce trebuie respectate în utilizarea tehnicii ciorchinelui:

- se scriu toate ideile referitoare la tema pusă în discuție;
- sunt puse în discuție și sunt notate toate ideile produse;
- se va folosi timpul dat la maxim, fiindcă vor putea apărea unele idei;
- se va lăsa să apară cât mai multe idei și cât mai multe conexiuni între ele.

Avantajele acestei tehnici de învățare sunt:

- a) În etapa de reflecție vom utiliza "ciorchinele revizuit" în care elevii vor fi ghidați prin intermediul unor întrebări, în gruparea informațiilor în funcție de anumite criterii.
- b) Prin această metodă se fixează mai bine ideile și se structurează informațiile facilitându-se reținerea și înțelegerea acestora.
- c) Adesea poate rezulta un "ciorchine" cu mai mulți "sateliți".

Aplicația 1. Funcția de gradul al doilea – Clasa a IX-a

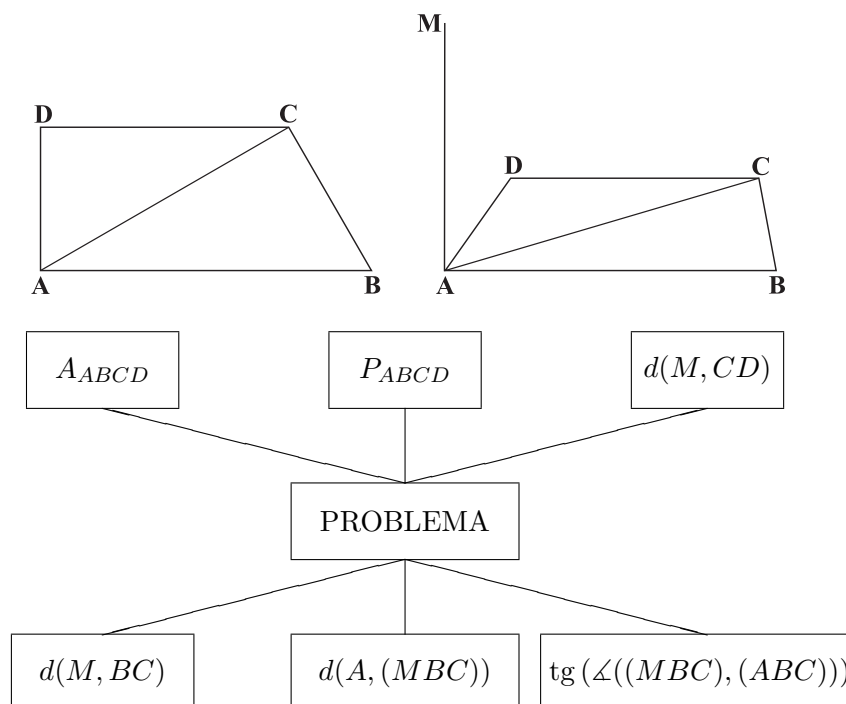


Aplicația 2. Problemă de geometrie – Clasa a VIII-a

Pe planul trapezului $ABCD$, $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, se ridică o perpendiculară $AM = 8\text{cm}$.

Știind că $AC \perp BC$, $AB = 16\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$, se cer:

- i) P_{ABCD} ;
- ii) A_{ABCD} ;
- iii) $d(M, CD)$;
- iv) $d(M, BC)$;
- v) $d(A, (MBC))$;
- vi) $\text{tg}(\angle((MBC), (ABC)))$.



2.2 Mijloace de învățământ

2.2.1 Definiție și clasificare

Mijloacele de învățământ sunt o categorie importantă a bazei tehnico-materiale a învățământului, care cuprinde ansamblul materialelor utilizate în procesul de învățământ și care, prin valorificarea potențialului pedagogic, sprijină realizarea eficientă a obiectivelor educației.

Mijloacele de învățământ (cf. [13], pag. 300) sunt instrumente sau complexe de instrumente menite a facilita transmiterea unor cunoștințe, formarea unor deprinderi, evaluarea unor achiziții, realizarea unor aplicații practice în cadrul procesului instructiv-educativ.

Mijloacele de învățământ sunt necesare la crearea situațiilor de învățare și sunt implicate în realizarea unei învățări rapide, accesibile și temeinice, în funcție de nivelul de vârstă, de nivelul intelectual al celor care învață, de specificul disciplinelor și de obiectivele urmărite.

Din punct de vedere al valorii pedagogice mijloacele de învățământ sunt implicate în perfecționarea procesului de predare-învățare, în per-

fecționarea tehnologiei didactice, în perfecționarea tehnicilor de evaluare și în perfecționarea modalităților de realizare a conexiunii inverse.

Mijloacele de învățământ au importanță deosebită, deoarece sprijină cunoașterea de către elevi a aspectelor realității, contribuie la realizarea eficientă a obiectivelor concrete, ca resurse de activizare a metodelor didactice, reflectă pătrunderea în domeniu a nivelului dezvoltării științei și tehnicii și sunt instrumente de lucru ale profesorului și elevilor.

Există mai multe clasificări ale mijloacelor de învățământ. Una dintre acestea face o clasificare după următoarele categorii:

- după natura și esența obiectuală;
- după caracteristicile constructive;
- după prezența sau absența mesajului didactic;
- după analizatorii solicitați;
- după rolul didactic dominant.

1. După natura și esența obiectuală, avem:

a) naturale-reale și originale:

– *naturale propriu-zise*: colecții de roci, minerale, insecte, substanțe chimice, etc.;

– *naturale, confecționate*: obiecte, dispozitive, aparate, unelte, instalații etc.

b) de substituție:

– *obiectuale, fizice*: mulate, corpuri geometrice, machete și modele etc.

– *iconice, figurative*:

○ reprezentări imagistice: fotografii, desene, schițe etc.;

○ reprezentări grafice complexe: planșe, hărți, panouri, tabele etc.

– *audio-vizuale*:

○ reprezentări audio: discuri, benzi magnetice, CD-audio etc.;

○ reprezentări video: folii, diapozitive, filme, CD-video etc.;

○ reprezentări audio-vizuale pentru ecran: filme, casete video, emisiuni televizive etc.

c) logico-matematice: concepte, raționamente, formule și simboluri matematice etc.

d) acționale: lucrări de laborator, modele lucrative simulate și informatice etc.

- e) mixte: cărți, manuale, culegeri, îndrumătoare etc.
- f) informatice: programe (soft-uri), fișiere tematice, baze de date etc.
- g) pentru evaluarea cunoștințelor: modele de evaluare orală, scrisă și practică, informatice.

2. După caracteristicile constructive, avem:

- *aparatură de laborator*: truse pentru elevi și profesori, aparate, dispozitive etc.;
- *utilaje pentru ateliere*: scule, dispozitive, mașini-unelte etc.;
- *audio mijloace-vizuale*: diaproiector, epiproiector, retroproiector, casetofon, CD-player, magnetofon, picup, televizor, videoproiector, DVD etc.;
- *modele*: mulate, machete funcționale, globuri terestre, modele simbolice, modele mute etc.;
- *naturalizări*: preparate microscopice, în lichid, împăieri, colecții de roci, semințe, plante etc.;
- *material grafic*: tablouri, planșe, atlase, albume, portrete etc.;
- *jocuri didactice*: pt. dezvoltarea vorbirii, matematice, practice, de simulare etc.
- *instrumente muzicale*: de suflat, de percuție, de coarde etc.

3. După prezența sau absența mesajului didactic, avem:

- a) Mijloace care cuprind mesaj didactic:
 - *obiecte naturale, originale*: animale vii sau conservate, colecții de plante, roci, substanțe, diorame, acvarii, aparate autentice etc.;
 - *obiecte substitutive, funcționale, acționale*: machete, mulate, modele, truse etc.;
 - *materiale grafice și figurative*: hărți, planșe, albume, panouri, scheme, diagrame, grafice, tabele, fotografii, tablouri etc.;
 - *simbolice-raționale*: tabele cu formule, planșe cu litere, scheme etc.;
 - *tehnice audio-vizuale*: emisiuni radio, discuri, benzi magnetice, proiecții, diapozitive, filme, emisiuni TV etc.
- b) Mijloace care facilitează transmiterea mesajelor didactice:
 - instrumente, aparate, instalații de laborator;
 - echipamente tehnice pentru laborator;
 - instrumente muzicale și aparate sportive;
 - mașini de instruit și calculatoare electronice;
 - jocuri didactice, simulatoare, instalații fonice;

– tabla magnetică, dispozitive automate.

4. După analizatorii solicitați, avem:

a) Mijloace tehnice-vizuale:

– *aparate*: epiproiector, epidiascop, diascol, aspectomat, aspectar, diastar, retroproiector, proiector, cameră video, monitor TV etc.;

– *materiale*: documente tipărite, rare, corpuri opace, documente fixe proiectabile, produse ale activității elevilor.

b) Mijloace tehnice-audio:

– *aparate*: pickup-uri, magnetofon, casetofon, aparate radio;

– *materiale*: discuri, benzi magnetice, emisiuni radio;

c) Mijloace tehnice audio-vizuale:

– *aparate*: televizor, cineproiector, calculator (sistem multimedia);

– *materiale*: filme, emisiuni TV, casete video, teste de control.

5. După rolul didactic dominant

a) Mijloace informativ-demonstrative

b) Mijloace logico-intuitive:

– *obiecte naturale, reale sau originale*: colecții de plante, roci, substanțe, preparate microscopice, organe conservate, diorame, soluții chimice, aparate etc.;

– *obiecte elaborate, confecționate*: reproduceri spațiale, modele machete, mulaje, corpuri geometrice, truse de piese;

– *substituenți imagistici*: ilustrații, fotografii, desene, documente, tabele, hărți, atlase, planșe, tablouri, panouri, diafilme, folii, filme, emisiuni TV, video, discuri.

c) Mijloace logico-raționale: simboluri, reprezentări grafice, scheme, simboluri verbale, formule, note muzicale, manuale, cărți, crestomații etc.

d) Mijloace de exersare și formare: aparate de experimentare și sportive, truse, instrumente tehnice, accesorii, instalații, instrumente muzicale, jocuri etc.

e) Mijloace de raționalizare a timpului în lecție: șabloane, ștampile, hărți de contur, mașini de multiplicat;

f) Mijloace de evaluare a rezultatelor învățării: baterii de teste, mașini de examinare, calculatoare.

O altă clasificare a mijloacele de învățământ (cf. [13], pag. 301) face o grupare pe două mari categorii:

a) mijloace de învățământ care cuprind; mesajul didactic

b) mijloace de învățământ care facilitează transmiterea mesajelor didactice.

a) *Mijloace de învățământ care cuprind mesajul didactic:*

- obiecte naturale, originale – animale vii sau conservate, ierbare, insectare, diorame, acvarii, materiale
- suporturi figurative și grafice
- hărți, planse, albume, panouri
- mijloace simbolic-raționale
- tabele cu formule sau simboluri, planșe cu litere, cuvinte, scheme structurale sau funcționale
- mijloace tehnice audiovizuale
- diapozitive, filme, suporturi audio și/sau video.

b) *Mijloace de învățământ care facilitează transmiterea mesajelor didactice:*

- instrumente, aparate și instalații de laborator
- echipamente tehnice pentru ateliere
- instrumente muzicale și aparate sportive
- mașini de instruit, calculatoare și echipamente computerizate
- jocuri didactice obiectuale, electrotehnice sau electronice
- simulatoare didactice, echipamente pentru laboratoare fonice.

2.2.2 Funcțiile mijloacelor de învățământ

În modul de folosire a mijloacelor de învățământ trebuie să cunoaștem funcțiile pedagogice, care influențează decisiv procesul de instruire. Dintre cele mai importante (cf. [19], pag. 169) amintim:

a) Funcția de instruire

Prin modul de sporire a capacității de a recepționa informațiile corecte despre conceptele matematice, mijloacele de învățământ dezvoltă capacitatea de a înțelege realitatea și modalitatea de a acționa asupra ei.

Înțelegerea sistemului de codificare a aparatului matematic contribuie la esențializarea conținuturilor științifice și prin modul de organizare a experienței senzoriale contribuie la consolidarea structurilor operatorii, permite ameliorarea procesului de prelucrare și interpretare a informațiilor primite.

Deasemenea, acestea sunt instrumente pedagogice de comunicare rapidă, ce optimizează relația profesor-elev.

b) Funcția de motivare a învățării și de orientare a intereselor profesionale ale elevilor

Toate mesajele audiovizuale stimulează curiozitatea și interesul elevilor, stimulează dorința de cunoaștere și creează condițiile mobilizării permanente a efortului în procesul de învățare.

Astfel, prin modalitățile specifice de utilizare, elevii primesc informații despre diverse profesii ceea ce contribuie la orientarea școlară și profesională.

c) Funcția demonstrativă

Atunci când transmiterea informațiilor este constrânsă de caracteristicile materialelor didactice folosite, adică nu putem folosi obiectele în mod nemijlocit, ne folosim de substitute ale acestora în valorificarea situației educative.

Prin această modalitate, se folosesc modelele materiale în demonstrarea caracteristicilor obiectuale, ce permit vizualizarea proceselor și fenomenelor care sunt inaccesibile observației directe.

d) Funcția formativă și estetică

Modul de folosire a mijloacelor de învățământ îl obligă pe profesor să realizeze o sistematizare a informațiilor date, ceea ce creează efecte benefice asupra modului de dezvoltare a structurilor cognitive ale elevilor, sporind în acest fel capacitatea de operare a gândirii.

Alături de stimularea valențelor formative sunt stimulate și actele de percepere a esteticului prin cultivarea capacității de înțelegere a frumuseții.

e) Funcția de școlarizare substitutivă sau de realizare a învățământului la distanță

Prin folosirea televiziunii și prin rețelele computerizate naționale și internaționale se realizează învățământul la distanță, care reprezintă o alternativă în cazul unor cerințe educaționale de tipul: formarea continuă pe diferite categorii socio-profesionale, învățarea limbilor străine, abordarea educației ecologice și a educației pentru pace.

f) Funcția de evaluare a randamentului elevilor

Mijloacele de învățământ, prin multitudinea formelor sale, contribuie în mod operativ la optimizarea modului de evaluare a progresului școlar prin evidențierea calităților diagnostice și prognostice ale notării.

Privind valențele psihologice ale mijloacelor de învățământ se poate afirma că integrarea lor în activitatea didactică duce la stimularea valorii demonstrative și intuitive a acestor surse de informare, necesare pentru

actualizarea informației și au avantajul transmiterii unui volum mare de informație folosită în stimularea valorii formativ-educative.

În predare, o serie de sarcini sunt preluate de mijloacele tehnice învățământ, care sub îndrumarea profesorului, oferă avantajul unei economii de timp și unei receptări rapide și eficiente.

Prin folosirea mijloacelor de învățământ crește potențialul de activizare a spiritului de observație, creează un grad ridicat de participare, de acțiune și de învățare prin acțiune.

Deasemenea, utilizarea atractivă a informației contribuie la formarea noțiunilor matematice, a modului de a gândi, a atitudinilor față de procesul didactic, favorizează formarea capacității de corelare interdisciplinară și consolidează convingerile științifice.

Prin eliminarea timpilor morți în activitatea didactică, care determină oboseala și plictiseala, este stimulat efortul profesorului în predare și al elevului în învățare.

Privitor la aspectele pedagogice în folosirea și integrarea mijloacelor de învățământ în activitatea didactică, putem spune că acestea îl ajută pe profesor dar nu-l poate înlocui. Astfel în cadrul relației profesor-elev, mijloacele de învățământ contribuie decisiv la formarea unor atitudini și convingeri față de procesul de predare-învățare și stimulează creerea unei ambianțe formative necesară procesului instructiv-educativ.

Rolul profesorului în folosirea mijloacelor de învățământ nu se rezumă doar la combinarea informației, care poate fi preluată și executată mult mai bine, ci se referă la stimularea și îndrumarea maturizării intelectuale și psihosociale a elevului.

De aceea toate materialele didactice trebuie să fie de bună calitate, accesibile, relevante, convingătoare și prezentate estetic.

În acest sens, mijloacele tehnice utilizate trebuie să fie într-o stare de perfectă funcționare, fără eventuale defecțiuni, care pot produce ilaritate și neîncredere, și trebuie să stabilească corelații între acestea și transferurile de cunoștințe matematice.

Mijloacele de învățământ (cf. [13], pag. 301) *se dovedesc a fi utile în măsura în care sunt integrate organic în contextul lecțiilor și li se imprimă o finalitate explicit pedagogică, fără supralicitări sau exagerări.*

În folosirea mijloacelor de învățământ există o serie de avantaje și dezavantaje pe care profesorul trebuie să le conștientizeze și de care trebuie să țină cont.

Ca avantaje putem menționa că mijloacele de învățământ:

- suplimentază explicațiile verbale în vederea realizării unui mesaj didactic coerent;
- aprofundează și consolidează cunoștințele matematice;
- provoacă și susține interese și motivații cognitive.

Ca dezavantaje, menționăm:

- poate produce exagerări și denaturări atunci când sunt folosite necorespunzător;
- permite o uniformizare a percepției și interpretării realității.

Eficiența utilizării mijloacelor de învățământ (cf. [13], pag. 302) *ține de inspirația și experiența didactică a profesorului în a alege și a-și sprijini discursul pe un suport tehnic care, în mod virtual, posedă calități ce așteaptă să fie exploatate.*

2.2.3 Materialele didactice

În cadrul mijloacelor de învățământ, materialul didactic este o categorie de material intuitiv cu ajutorul căruia se pot realiza cerințele principiului intuiției în condițiile percepției mijlocite.

Atunci când materialul didactic este bine integrat în activitatea didactică, are o formă și un conținut corespunzătoare, acesta oferă un suport vizibil și intuitiv, ce îi familiarizează pe elevi cu o realitate greu inaccesibilă pe o cale directă, suplimentează explicațiile verbale, provoacă și susține interese și motivații cognitive și consolidează cunoștințe și abilități.

Materialul didactic este realizat în cele mai multe cazuri de către profesor pentru a putea fi folosit în scopul individualizării și diferențierii învățământului.

Este însă confecționat și de către elevi și în acest sens este eficient, deoarece prin confecționare conștientizează noțiunile matematice, sistematizează cunoștințele, stimulează interesul pentru cunoaștere și oferă satisfacții personale.

2.3 Moduri și forme de organizare a procesului de învățământ

2.3.1 Moduri de organizare ale instruirii

Varietatea și complexitatea situațiilor instructiv-educative următoarelor trei moduri de organizare a instruirii:

- a) Activitate frontală
- b) Activitate pe grupe de elevi
- c) Activitate individuală.

a) Activitatea frontală

În activitatea pe clase de elevi, forma de activitate cea mai folosită este activitatea frontală (cf. [14], pag. 109) pentru următoarele considerente:

- favorizează transmiterea unui mare volum de cunoștințe pe unitate de timp;
- rezervă profesorului un rol central în sistemul relațiilor ce se stabilesc în activitatea de educație;
- instaurează un ritm unic de desfășurare a activității;
- permite profesorului să țină sub control întreaga desfășurare a activității.

Această activitate o regăsim în: lecții, în orele de laborator, în activitățile din cabinete pe fiecare specialitate, în vizite și în excursii.

La baza predării frontale stă principiul tratării nediferențiate, al muncii egale cu toți elevii din clasă, unde profesorul are rolul principal în organizarea, conducerea și dirijarea activității elevilor.

În activitatea frontală activitatea profesorului se bazează exclusiv pe expunere, pe transmitere de cunoștințe la nivelul întregii clase, iar învățarea se reduce la achiziționarea pasivă de cunoștințe.

Prin intermediul activității frontale, elevii execută în același timp, aceleași sarcini, lucrând individual, fără a avea legături între ei.

De aceea sunt destule reproșuri față de folosirea exagerată a activității frontale (cf. [14], pag. 109) printre care:

- poziția activă de transmițător de mesaje a profesorului, în timp ce elevii se află într-o stare pasivă, de recepție;

- *preocuparea esențială a profesorului rămâne aceea de a prelucra și accesibiliza materialul cognitiv oferit elevilor, ceea ce reduce din investiția de efort pe care aceștia o fac în direcția acumulării informației;*
- *în contextul activităților frontale elevul își pierde singularitatea și unicitatea.*

Este totuși de preferat să folosim această formă de activitate atunci când se intenționează să se expună o serie de noțiuni matematice fundamentale, când sunt sintetizate o serie de informații mai cuprinzătoare și în cazul unor demonstrații.

Iată de ce se impune folosirea organizării activităților de instruire într-o manieră frontală, la nivelul învățământului gimnazial și liceal atunci când este justificată cerința transmiterii unui volum mare de noțiuni matematice într-un timp scurt și unde este accentuată latura abstractă a conținuturilor matematice.

b) Activitățile pe grupe de elevi

Vom aborda activitatea pe grupe de elevi pe două direcții:

1. activitatea pe grupuri de învățare,
2. activitatea pe grupuri de predare.

1. Activitatea pe grupuri de învățare

Această activitate pe grupuri de învățare, o vom caracteriza.

i) Activități pe grupuri tip clasă

În organizarea și funcționarea grupurilor școlare s-a ținut cont de valorificarea resurselor de care dispune grupul ca întreg și de potențialul de care dispune fiecare membru al grupului școlar.

Din această perspectivă, în practica organizării grupurilor școlare pe fiecare clasă, există două modele: clase omogene și clase eterogene

Clasele omogene prezintă (cf. [14], pag. 112) următoarele caracteristici:

- *elevii au posibilități de învățare asemănătoare sau preferințe comune, ceea ce facilitează adaptarea procesului didactic la potențialul de învățare al elevilor și la interesele acestora;*
- *colaborarea între elevi se realizează, de asemenea, mult mai ușor datorită intereselor comune;*

- *demersurile profesorului sunt mult mai ușor adaptabile particularităților elevilor.*

Clasele eterogene (cf. [14], pag. 112-113) prezintă următoarele caracteristici:

- *elevii au posibilități de învățare diferite, ceea ce îl obligă pe profesor să se adreseze nivelului mijlociu al clasei de elevi;*
- *efortul pe care îl face profesorul în direcția accesibilizării mesajelor cu caracter informațional este mare și, în general nu poate acoperi toate nivelurile;*
- *favorizează intensificarea interacțiunilor cu caracter interpersonal, efortul comun fiind orientat în direcția satisfacerii sarcinilor cu caracter cognitiv.*

Chiar dacă majoritatea claselor sunt eterogene, profesorul caută în general situații de folosire a organizării elevilor în grupuri omogene, care sunt favorabile activităților pe nivele de instruire.

ii) Activități de învățare pe grupe mici

Datorită caracterului individualizat al învățării, ca mod specific de accesibilizare la nivelul fiecărui elev, aceasta se poate realiza și în contextul activității cu grupul școlar, însă în grupuri mai mici. Această organizare în grupuri mai mici permite o afirmare mai lejeră a particularităților individuale și datorită încheșării unui climat familial este favorizată realizarea învățării prin cooperare.

Cele mai cunoscute moduri de organizare pe grupuri mici (cf. [14], pag. 113) sunt:

- *grupul de descoperire – unde sarcina este de a investiga, de a experimenta și de a demonstra ceva;*
- *grupul de confruntare – unde este constituit pentru provocare unei competiții;*
- *grupul de interevaluare – constituit pentru antrenarea elevilor în actul evaluării;*
- *grupul de antrenament mutual – unde este constituit în scopul de a încuraja elevii pentru a se ajuta între ei pentru rezolvarea unei sarcini școlare;*

- *grupul de nevoi – este constituit pentru elevii aflați în dificultate.*

Trebuie să evidențiem că toate aceste grupuri, sunt grupuri de învățare, deoarece sunt constituite pentru rezolvarea unor necesități școlare.

iii) Buzz-grupul

Se mai numește și grupul de discuții, care stă la baza dezvoltării la elevi a manifestărilor de tip creativ și a dezvoltării spiritului de inițiativă.

Numărul ideal de elevi pe care trebuie să-l aibă grupul este de patru și li se cere să desfășoare o activitate sub forma unei aceiași sarcini sau chiar sarcini diferite.

În cadrul activităților în buzz-grup, caracteristica esențială este aceea de realizare a unui consens final asupra sarcinii de realizat.

Sunt o serie de avantaje (cf. [14], pag. 115), după cum urmează:

- *încurajarea elevilor pentru a interacționa unii cu alții;*
- *evitarea situației ca un individ să-și expună ignoranța în fața clasei și să fie ridiculizat.*

În realizarea unor activități de acest tip, profesorul trebuie să cunoască bine grupul ales și să provoace situații în care să fie participant, iar ocaziile de învățare să fie selectate încât elevii să poată exersa diferitele roluri pe care le primesc și să poată depăși dificultățile pe care le întâmpină.

2. Activități pe grupuri de predare

În cadrul grupului de predare vom aborda metoda team teaching, care are o largă utilizare.

Team teaching-ul este o metodă de predare folosită în educația adulților prin organizarea unor sesiuni comune, unde într-o primă etapă este prezentat în plen conținutul de idei ce reprezintă obiectul central al reuniunii, după care în partea a doua se desfășoară activitățile pe grupe sau individual.

Astfel, în prima parte sunt activitățile de predare, prezentate de unul sau mai mulți profesori. Dacă sunt mai mulți ei își împart sarcinile, unde pe lângă forma expunerii pot recurge și la forma dezbaterii prin intermediul întrebărilor adresate unul altuia.

Din studierea eficienței activităților de team-teaching în performanțelor elevilor reiese ca rezultatele cele mai bune sunt realizate când

predarea a fost efectuată de un singur profesor față de cea efectuată de o echipă de profesori, motiv pentru care metoda team-teaching nu este considerată superioară metodei predării clasice.

c) Activitate individuală

Activitatea individuală sau învățământul individualizat este cerută de rezolvarea situațiilor în care fiecare elev trebuie sprijinit într-un mod individual pentru achiziționarea comportamentelor necesare.

Învățământul individualizat oferă un răspuns în efortul de căutare a acelor oportunități care să permită fiecărui elev o dezvoltare în ritmul propriu și unde profesorul intervine numai atunci când sunt dificultăți în procesul de învățare.

Principalele modalități de realizare a unui învățământ individualizat (cf. [14], pag. 120) sunt următoarele:

- *prin distribuirea unor sarcini individuale în contextul activităților realizate cu întreg grupul școlar;*
- *prin realizarea unor fișe de muncă individuală;*
- *prin recomandarea unor teme de studiu individual;*
- *prin îndeplinirea individuală a unor sarcini de învățare: realizarea de lucrări practice, a unor planșe, prin rezolvarea de probleme și prin folosirea calculatorului.*

Toate activitățile de învățare cer cu acuitate un studiu individualizat, studiu care se caracterizează prin faptul că fiecare elev poate lucra în ritmul propriu și care face posibil o observare și corectare a fiecărei greșeli.

Prin studiul individualizat orice activitate devine abordabilă fiecărui elev atât în achiziționarea cunoștințelor cât și în modul de înțelegere a lor.

Studiul individualizat prezintă (cf. [14], pag. 121) următoarele avantaje:

- *prin respectarea ritmului individual de învățare, unde educația lasă fiecărui elev șansa de a reuși;*
- *studiul individualizat permite recuperarea rapidă a greșelilor, corectarea lor imediată și găsirea soluțiilor pedagogice pentru consolidarea achizițiilor care se dovedesc a fi insuficient stabilizate;*

- *tehnicele contemporane de studiu independent introduc în acțiunea educativă o componentă psihologică esențială: parțial, elevul însuși este cel care își alege tema de lucru, rămânând inclus în clasa de elevi;*
- *distribuirea unor sarcini individuale conduce la creșterea randamentului în învățare a întregului grup.*

Tot (cf. [14], pag. 123) studiul individualizat prezintă și o serie de dezavantaje:

- *prezintă probleme serioase de organizare;*
- *există o precaritate a condițiilor materiale;*
- *sunt probleme în gestionarea timpului pe care profesorul îl are la dispoziție;*
- *folosirea studiului individualizat face ca elevii să fie lipsiți de beneficiul prezenței grupului.*

2.3.2 Forme de organizare a instruirii

În sistemul de organizare al formelor de organizare a activității didactice cea mai frecventă modalitate de realizare a activității de predare și învățare a devenit organizarea pe clase și lecții.

Fundamentarea teoretică a venit încă din secolul XVII de la pedagogul ceh Jan Amos Comenius, care a venit cu o serie de clarificări asupra modului de distribuire a elevilor pe clase după vârstă și asupra parcurgerii materiei după programe unitare pe parcursul unui an școlar.

Definirea lecției s-a făcut după mai multe criterii și în cele ce urmează vom reda câteva astfel de modalități.

Din punct de vedere al modului de organizare, lecția este forma de activitate care se desfășoară în clasă, sub îndrumarea profesorului, într-un timp precis delimitat, pe baza cerințelor cuprinse în programă.

Astfel, (cf. [32], pag. 247), lecția este o *activitate a elevilor sub îndrumarea profesorului în vederea asimilării cunoștințelor și formării deprinderilor prevăzute de o temă din programa școlară și într-un timp determinat.*

Având în vedere conținutul, lecția reprezintă un sistem de idei articulate logic și didactic, în conformitate cu cerințele psihopedagogice

referitoare la predarea cunoștințelor, la aplicarea lor, la verificarea, evaluarea și notarea rezultatelor.

Leția este considerată forma de bază a organizării procesului de învățământ.

Din punct de vedere curricular (cf. [11], pag. 259), *leția este activitatea elevilor desfășurată sub conducerea cadrului didactic la nivelul corelației profesor-elev, care evidențiază, pe de o parte, necesitatea profesorului de a lectura esențialul, iar pe de altă parte, posibilitatea formativă a elevului de a medita eficient.*

Din perspectiva sistemică, leția se constituie într-un program didactic, respectiv un sistem de procedee de lucru și acțiuni comune ale profesorului și ale elevilor, structurate și organizate în vederea atingerii obiectivelor instructiv-educative propuse și în vederea activizării elevilor în procesul didactic.

Astfel (cf. [16], pag. 93) *leția este considerată o unitate didactică fundamentală, o formă a procesului de învățământ prin intermediul căreia o cantitate de informații este percepută și asimilată activ de elevi într-un timp determinat, pe calea unei activități intenționate, sistematice, cu autoreglare, provocând în sfera biopsihică a acestora o modificare în sensul formării dorite.*

Statutul privilegiat al lecției se datorează valențelor instructiv-educative pe care le are în comparație cu celelalte forme de activitate (cf. [19], pag. 193), dintre care amintim:

- *asigură un cadru organizat eficient pentru procesul instructiv-educativ, generând un sistem de relații profesor-elevi, și promovând activități didactice în măsură să activeze elevii și să stimuleze performanțele învățării;*
- *asigură însușirea sistematică a bazelor științifice prin studiul obiectelor de învățământ;*
- *formează capacitatea de aplicare în practică a cunoștințelor teoretice însușite de elevi, introducându-i în procesul cunoașterii sistematice, nemijlocite sau mijlocite, a realității;*
- *oferă elevului posibilitatea de a-și exercita capacitățile intelectuale și afective, de a-și forma și consolida sentimente, convingeri, atitudini, trăsături pozitive de caracter și forme adecvate de comportament.*

Sigur există și o serie de critici legate de ponderea excesivă a predării, de neglijența activităților individuale, de folosirea excesivă a activității frontale, de diferențierea activității didactice și de realizarea conexiunii inverse la clasele cu efective mari.

În proiectarea oricărei lecții putem folosi o serie de structuri mobile în cadrul cărora trebuie să realizăm mai multe evenimente didactice. Modelul cel mai folosit în proiectarea unei lecții este Gagne-Briggs, care propune parcurgerea următorilor pași:

- captarea și păstrarea atenției;
- prezentarea în fața elevilor a obiectivelor urmărite;
- reactualizarea elementelor învățate anterior;
- prezentarea noului material;
- dirijarea învățării;
- obținerea performanței;
- asigurarea conexiunii inverse;
- evaluarea performanțelor;
- intensificarea procesului de retenție și transfer.

Tipurile de lecție sunt desemnate în funcție de obiectivul didactic fundamental, de conținutul învățării și de strategia didactică folosită.

Trebuie spus că nu există o tipologie unică ci sunt variante relative care țin cont de contextul concret al instruirii și de variabilele procesului instructiv-educativ.

Tipurile de lecție prezentate sunt orientative, relative și pot fi considerate variante alternative ale acestei tipologii.

În lecțiile de matematică din învățământul preuniversitar putem folosi următoarele tipuri:

a) Lecție mixtă sau combinată

În cadrul acestei lecții profesorul antrenează elevii în activități diverse ca: dobândire de noi cunoștințe, formare de priceperi și deprinderi, repetare și sistematizare, verificare și apreciere.

Toate aceste activități în cadrul lecției mixte trebuie să apară ca un tot unitar, adică elevii să fie antrenați în diverse tipuri de activități corespunzătoare fiecărei sarcini didactice.

Structura orientativă a acestui tip de lecție ar putea fi:

- momentul organizatoric;
- verificarea temei și a cunoștințelor anterioare;
- pregătirea elevilor pentru receptarea noilor cunoștințe;
- anunțarea lecției noi și a obiectivelor operaționale;
- predarea noilor cunoștințe;
- fixarea și sistematizarea conținuturilor predate;
- retenție și transfer.

b) Lecția comunicare/însușire de noi cunoștințe

Pentru acest tip de lecție, obiectivul fundamental este însușirea unor noi cunoștințe și dezvoltarea capacităților intelectuale.

Astfel activitatea didactică este orientată spre dobândirea de către elevi a unor cunoștințe, a unor competențe intelectuale și spre dezvoltarea operațiilor gândirii.

În acest caz momentul predării noilor conținuturi are o pondere semnificativă în raport cu celelalte etape, care sunt mai restrânse în timp.

Deci se păstrează etapele lecției mixte, însă pentru clasele mai mari lecția tinde către o structură monostadială.

În funcție de tema aleasă și de strategia didactică folosită, variantele acestui tip îl regăsim în lecțiile introductive și în prelegeri.

c) Lecție de formare de priceperi și deprinderi

Acest tip de lecție are ca scop familiarizarea elevilor cu diferite procedee de muncă intelectuală, cu organizarea și desfășurarea muncii independente și cu aplicarea în practică a cunoștințelor.

Structura orientativă a acestei lecții ar putea fi:

- momentul organizatoric;
- anunțarea temei și a obiectivelor operaționale;

- actualizarea unor cunoștințe necesare pentru însușirea noului conținut;
- demonstrația sau execuția model;
- antrenarea elevilor în realizarea activității;
- realizarea independentă a activității;
- aprecierea performanțelor elevilor și precizări asupra continuării activității.

d) Lecția de recapitulare și sistematizare

În cadrul acestui tip de lecție este vizată consolidarea cunoștințelor însușite, aprofundarea acestora și completarea unor lacune.

Prin această lecție profesorul contribuie la aprofundarea și perfecționarea cunoștințelor elevilor și realizează legături între cunoștințele unui capitol sau a mai multor capitole.

Structura orientativă ar putea fi următoarea:

- precizarea conținutului, al obiectivelor și al planului de recapitulare;
- realizarea recapitulării pe baza planului de recapitulare;
- realizarea de către elevi a unor lucrări pe baza cunoștințelor recapitulate aprecieri asupra modului de lucru al elevilor;
- tema pentru acasă.

e) Lecția de verificare și apreciere a rezultatelor școlare

În cadrul acestei lecții se realizează controlul și evaluarea randamentului școlar și se emit aprecieri asupra activității desfășurate prin intermediul notelor. În cadrul acestor aprecieri sunt prezentate și o serie de elemente necunoscute legate de examinarea orală și scrisă.

Structura orientativă ar putea fi:

- precizarea conținutului ce va fi verificat;
- verificarea propriuzisă a conținutului;
- aprecierea rezultatelor;
- adoptarea unor decizii de ameliorare a rezultatelor.