**Buletin Ştiinţific - Universitatea din Piteşti**
Seria Matematică şi Informatică, Nr. **18** (2012), pg.1-5

# O metodă simplă pentru calculul determinantului de ordin 4

Laurenţiu DEACONU*

October, 2012

**Abstract**

În această lucrare este prezentată o schemă simplă, bazată pe regula lui Sarrus, care permite calculul determinantului unei matrici de dimensiune $4 \times 4$.

Această metodă este mai simplă şi mai usor de reţinut şi aplicat decât alte scheme şi metode [1], [2], [3], [4] utilizate pentru calculul determinantului de ordin 4.

**2010 Mathematics Subject Classification:** Primary 65F40, 11C20; Secondary 15A15.

**Key words and phrases:** determinant, scheme de calcul.

## 1 Prezentarea metodei (Regula lui Deaconu)

Fie

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

un determinant de ordin 4.

*Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Piteşti, Str. Târgu din Vale, nr. 1, 110040 Piteşti, România, `laurentiu.deaconu@upit.ro`

Ca şi în regula lui Sarrus această nouă metodă foloseşte o extindere a matricei iniţiale. Modalitatea de extindere este prezentată în schema următoare (Figura 1.) şi se obţine în trei paşi:

1. în partea dreaptă se copiază primele două coloane în ordine inversă;
2. în partea stângă se copiază ultimele trei coloane în ordinea 4, 2 si 3 (de la stânga la dreapta);
3. în partea de jos se copiază primele trei linii ale matricei obţinute.

$$
\begin{array}{ccc|cccc|cc}
a_{14} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{a_{14}} & a_{12} & a_{11} \\
a_{24} & a_{22} & a_{23} & \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \boldsymbol{a_{24}} & a_{22} & a_{21} \\
a_{34} & a_{32} & a_{33} & \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & \boldsymbol{a_{34}} & a_{32} & a_{31} \\
a_{44} & a_{42} & a_{43} & \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} & \boldsymbol{a_{44}} & a_{42} & a_{41} \\
\hline
a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} \\
a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} \\
a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31}
\end{array}
$$

Figura 1.

Pentru calculul determinantului $\Delta$ parcurgem următorii paşi:
$i$) Calculăm cele opt produse ale elementelor fiecărei "diagonale interioare", stânga-dreapta şi dreapta-stânga, ca în Figura 2.

$$
\begin{array}{ccc|cccc|cc}
a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} \\
a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} \\
a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31} \\
a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{42} & a_{41} \\
\hline
a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} \\
a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} \\
a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31}
\end{array}
$$

Figura 2.

Fiecare produs va primi semnul "+" sau "−", alternativ, de sus în jos, începând cu "+" pentru fiecare set: stânga-dreapta, respectiv dreapta-stânga. Apoi calculăm suma termenilor obţinuţi:

$$
\begin{aligned}
S_1 = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{21}a_{32}a_{43}a_{14} + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} - a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}+ \\
& +a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{24}a_{33}a_{42}a_{11} + a_{34}a_{43}a_{12}a_{21} - a_{44}a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

*ii*) Calculăm cele opt produse ale elementelor "diagonalelor exterioare-stânga", stânga-dreapta şi dreapta-stânga, precum şi cele opt produse ale elementelor "diagonalelor exterioare-dreapta", stânga-dreapta şi dreapta-stânga, ca in Figura 3.

$$\begin{array}{ccc|cccc|cc}
a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} \\
a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} \\
a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31} \\
a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{42} & a_{41} \\
\hline
a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} \\
a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} \\
a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31}
\end{array}$$

Figura 3.

Fiecărui produs i se asociază unul din semnele "$-$" sau "$+$", alternativ, de sus în jos, începând cu "$-$" pentru fiecare set (stânga-dreapta, respectiv dreapta-stânga) pentru fiecare parte. Apoi calculăm suma termenilor obţinuţi:

$$\begin{aligned}
S_2 = &-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{24}a_{32}a_{43}a_{11} - a_{34}a_{42}a_{13}a_{21} + a_{44}a_{12}a_{23}a_{31} - \\
&-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{21}a_{33}a_{42}a_{14} - a_{31}a_{43}a_{12}a_{24} + a_{41}a_{13}a_{22}a_{34} - \\
&-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{23}a_{34}a_{42}a_{11} - a_{33}a_{44}a_{12}a_{21} + a_{43}a_{14}a_{22}a_{31} + \\
&-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{21}a_{32}a_{44}a_{13} - a_{31}a_{42}a_{14}a_{23} + a_{41}a_{12}a_{24}a_{33}.
\end{aligned}$$

*iii*) În final, determinantul este:

$$\Delta = S_1 + S_2.$$

## 2 Aplicaţie

Calculăm determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

utilizând metoda prezentată mai sus.

Construim tabloul

$$
\begin{array}{rrr|rrrr|rr}
6 & 3 & -3 & -2 & 3 & -3 & 6 & 3 & -2 \\
-2 & 1 & -1 & 7 & 1 & -1 & -2 & 1 & 7 \\
1 & -2 & 4 & 3 & -2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\
-3 & -3 & 5 & 2 & -3 & 5 & -3 & -3 & 2 \\
\hline
\multicolumn{1}{r}{6} & \multicolumn{1}{r}{3} & \multicolumn{1}{r}{-3} & \multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{3} & \multicolumn{1}{r}{-3} & \multicolumn{1}{r}{6} & \multicolumn{1}{r}{3} & \multicolumn{1}{r}{-2} \\
\multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{1} & \multicolumn{1}{r}{-1} & \multicolumn{1}{r}{7} & \multicolumn{1}{r}{1} & \multicolumn{1}{r}{-1} & \multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{1} & \multicolumn{1}{r}{7} \\
\multicolumn{1}{r}{1} & \multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{4} & \multicolumn{1}{r}{3} & \multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{4} & \multicolumn{1}{r}{1} & \multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{3}
\end{array}
$$

şi calculăm $S_1$ şi $S_2$:

$$
\begin{gathered}
S_1 = [(-2) \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-3) - 7 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 6 + \\
+3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1] + \\
+[6 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - (-2) \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-2) + \\
+1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 - (-3) \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 3] = \\
(24 + 420 - 54 + 6) + (24 + 48 + 105 - 27) = 396 + 150 = 546, \\
S_2 = \{[-6 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-2) - \\
-1 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 7 + (-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3] + \\
+[-(-2) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + 7 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 6 - \\
-3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 1]\} + \\
+\{[-(-3) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - \\
-4 \cdot (-3) \cdot 3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3] + \\
+[-(-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-3) - \\
-3 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 4]\} = \\
= [(-48 - 40 - 63 + 27) + (-12 - 504 + 90 - 6)] + \\
+[(24 - 6 + 252 + 90) + (10 - 126 - 54 - 48)] = \\
= (-124 - 432) + (360 - 218) = -556 + 142 = -414.
\end{gathered}
$$

Obţinem $\Delta = 546 - 414 = 132$.

## 3 Concluzii

Schema prezentată furnizează o metodă simplă pentru calculul determinantului de ordin 4 care nu depinde de relaţii între elementele matricii şi nici nu necesită raţionamente matematice speciale.

## Bibliografie

[1] Arschon, S., *Verallgemeinerte Sarrussche Regel*, Mat. Sb., **42**:1 (1935), pg. 121-128.

[2] http://faculty.pepperdine.edu/dstrong/LinearAlgebra/2009/JMM2009Caffentzis.pdf

[3] http://regularize.wordpress.com/tag/determinant/

[4] http://regularize.wordpress.com/2011/06/22/sarrus-rules-for-4-x-4/